

# CALCULUL RIGIDITĂȚII PENTRU PIESELE ÎN TREPTE, SUPUSE AȘCHIERII PE STRUNG

# THE COMPUTATION OF RIGIDITY FOR THE STEP PARTS, CUT ON LATHE

Constantin COSOVAN

“Politehnica” University of Timișoara, Romania

**Rezumat.** În strategia clasică de conducere dimensională a proceselor de prelucrare accentul deosebit se pune pe prelucrător (programator), pe când conducerea adaptivă se bazează pe interpretarea informațiilor culese din proces și prelucrate prin programe adecvate.

Pentru comanda adaptivă, cunoașterea posibilelor deformații pe care semifabricatul le poate prezenta (cu precădere în cazul regimurilor intense de prelucrare) este esențială. În lucrare se propune o modalitate analitică de calcul pentru deformația posibilă a fibrei medii a semifabricatului supus prelucrării, obiectiv mai puțin abordat în literatura de specialitate.

Astfel se satisface și interesul permanent pentru perfecționarea modelelor matematice, care devin din ce în ce mai adecvate descrierii acestor procese de prelucrare. Tendința este susținută și de apariția unor senzori și subansambluri tot mai performante pentru măsurarea presiunii, vibrațiilor și temperaturii.

**Cuvinte cheie:** adaptiv, comandă, fibră medie, funcție tehnologică, prelucrare

## 1. Introducere

Scopul automatizării proceselor de prelucrare mecanică se reflectă în timp pe multiple direcții, dintre care, în funcție de context, unele devin prioritare. Dintre acestea, cele referitoare la cost, calitate, precizie și timp nu pot să lipsească.

Conform definiției, prin comanda adaptivă (CA) se înțelege “un sistem de automatizare a prelucrării care pe baza informațiilor primite de la mărimile de referință și tehnologice (caracteristici ale mașinii, sculei, materialului, capacitate productivă, forțe, puteri, costuri de prelucrare, indici de calitate a piesei etc.) și a informațiilor provenite prin măsurarea unor parametri ai regimului de prelucrare, chiar în timpul desfășurării procesului, prelucrate potrivit unei anumite strategii, reglează parametrii procesului de prelucrare pentru a se obține un efect tehnico-economic optim” [1].

Modelele matematice devin eficiente dacă funcțiile utilizate reușesc să descrie cât mai exact și complet variabilitatea parametrilor reglabili ai procesului. Aceste funcții au fost numite ‘funcții de referință’ deși sunt dependente de proces (adică

**Abstract.** In the classical strategy of the dimensional directing of the machining processes the particular stress is laid upon the machining agent (programmer), while the adaptive management is based on the interpretation of the information collected from the process and machined through the program.

For the adaptive control, the knowledge of the possible strains which the semi-finished product may show (mainly in case of high duty) is essential. In this work, there is proposed an analytical way of computation for the possible strain of the middle fibre of the semi-finished product that is being processed, an objective less discussed in the literature. Thus, there is also met the permanent interest for the improvement of the mathematical models, which become more and more adequate for the description of these machining processes. This tendency is also supported by the occurrence of some more and more performant sensors and subassemblies for pressure, vibrations and temperature measurement.

**Key words:** adaptive, control, middle fibre, technological function, machining

## 1. Introduction

The aim of the automation of the mechanical machining processes is reflected in time in various directions, some of which, as function of the context, become of prior interest. As far as these directions are concerned, those referring to cost, quality, accuracy and time are essential.

As per the definition, adaptive control (AC) means “an automation system of the machining, which on the basis of the information received from the reference quantities and the technological quantities (machine, tool, material characteristics, productive capacity, forces, powers, machining costs, the part quality indexes, etc.) and of the information obtained through the measurement of certain parameters of the machining regime, during the very machining process, processed according to a certain strategy, adjusts the machining process parameters in order to obtain an optimum technical-economic effect” [1].

The mathematical models become efficient if they succeed to describe, as accurate and complete as possible, the variability of the process adjustable parameters. These functions have been called ‘reference functions’, although they depend on the

variabile în timp); o denumire mai adecvată ar fi aceea de funcții tehnologice (ale procesului) [2]. Deducerea analitică a acestor funcții devine anevoioasă pentru piesele cu dimensiuni variabile.

## 2. Metodici de stabilire a funcțiilor tehnologice pentru comanda adaptivă

### 2.1. Context - comentarii

Procesul de strunjire, este caracterizat de anumiți parametri ce definesc forța de aşchiere optim admisibilă (definită ca funcție tehnologică), pentru o anumită rigiditate tehnologică a STE, varietate a dimensiunilor piesei (lungimi, diametre – cu sau fără trepte) și a modului de prindere a acesteia (combinat C, între vârfuri V sau în universal U) [2]. Alături de acești parametri se evidențiază și faptul că efectul forței de aşchiere mai depinde de:

- poziția instantanee a sculei în raport cu axele semifabricatului;
- deformația termică a elementelor STE;
- forța de inerție a semifabricatului (la piesele grele);
- modulul de elasticitate al materialului piesei.

În funcție de modul de prindere al piesei se poate evalua (în ipotezele teoriei rigidității pentru domeniul deplasărilor mici) și forța de strângere (încărcare) a piesei pe timpul prelucrării. Pentru toate operațiile de prelucrare apare și problema reglajului limitativ, datorită condițiilor impuse de calitatea suprafeței prelucrate și de durabilitatea sculei.

De obicei mărimile reglate sunt viteza, avansul și forța totală de aşchiere, mărimea acestora intervenind în determinarea limitelor impuse pentru mașina unealtă în cauză. Obținerea compromisului optim după anumite criterii, între anumiți parametri și cerințele impuse, presupune o lege complexă pentru comanda adaptivă, ceea ce doar prin dimensionarea corespunzătoare a forțelor este posibilă.

### 2.2. Prelucrarea prin strunjire

Definirea funcțiilor tehnologice care să asigure precizia și capacitatea de producție corespunzătoare pentru prelucrarea prin aşchiere, s-a bazat pe relația [2]:

process (i.e. they vary according to time); a more adequate name would be that of (the process) technological functions [2]. The deduction of the analytical expressions of the functions is rather difficult to accomplish for the parts with variable dimensions.

## 2. The possible elastic strains of the carrying elements of the machine-tools

### 2.1. Context - commentaries

The turning process is characterized by certain parameters which define the optimum admissible cutting force (defined as technological function), for a certain technological rigidity of STE, a certain variety of the part dimensions (lengths, diameters – with or without steps), and the way the part is fixed (combined C, between centres V, or in the universal lathe U) [2]. There is also highlighted the fact that, besides these parameters, the cutting force effect depends, as well, on the following:

- the instantaneous position of the tool as compared to the semi-finished product axes;
- the temperature strain of the STE elements;
- the inertia force of the semi-finished product (at heavy parts);
- the elasticity way of the part material.

The part fixing way also enables the assessment (in the hypothesis of the theory of rigidity for the range of small displacements) of the part clamping (loading) force during its machining. For all the machining operations, there also occurs the problem of the limiting adjustment, on account of the conditions required by the quality of the machined surface and by the durability of the tool.

Usually, the adjusted quantities are: velocity, feed, and the total cutting force, their size influencing the determining of the required limits for the given machine-tool. The obtaining of the optimum compromise, according to certain criteria, between certain parameters and the imposed requirements, supposes a complex law for the adaptive control, which is possible only through the adequate dimensioning of the forces.

### 2.2. Turning processes

The defining of the technological functions that ensure the adequate accuracy and production capacity for cutting was based on the following relation [2]:

$$y_{STE} = \frac{F}{R_{STE}} \quad (1)$$

unde:

$y_{STE}$  – mărimea deformației măsurată la piesă, ce apare la instalarea unui anumit regim de prelucrare stabilit;

$F$  – forța de așchiere totală (conform cu STAS 6599/4 – 89);

$R_{STE}$  – rigiditatea efectivă a mașinii unelte în procesul de așchiere, cu manifestare directă asupra piesei aflată în prelucrare.

Precizia de formă a piesei se consideră realizată, dacă eroarea de prelucrare în secțiune longitudinală și transversală rămâne constantă pe timpul prelucrării, menționând că precizia de prelucrare este funcție și de echilibrarea statică a semifabricatului. Problema erorii în secțiune transversală se pune numai la modul de prindere în universal (situație în care poate să apară mișcarea de precesie a axei semifabricatului și care limitează drastic forța de așchiere).

Forța de lucru maxim admisibilă  $F_e (F_c)$  devine astfel forță de referință ce depinde de:

- forma geometrică a semifabricatului (definită de lungimea  $l (l_i)$  și diametrul  $\Phi (\Phi_{i,})$  referitor la treptele piesei, dacă ele există);
- modul de prindere a semifabricatului, în ordinea crescătoare a forțelor de așchiere maxim admise înscriindu-se:
  - I. fixare în universal (U);
  - II. prindere între vârfuri (V);
  - III. fixare în universal și prindere în vârf adică prindere combinată (C).
- poziția din fiecare moment a sculei în raport cu axa semifabricatului și originea sistemului de coordonate în care se situează acesta;
- forța de inerție a semifabricatului (importantă la piesele grele și mai ales pentru cele prinse în universal);
- deformația termică a elementelor STE (diferențiată valoric, dar și ca importanță, de la element la element), efect mai pronunțat în cazul în care se lucrează cu pinola blocată.

Deoarece piesa în mișcare este supusă unei solicitări complexe, se dorește ca funcția ce descrie forța totală de așchiere, să devină “referința” pentru comanda adaptivă. Indiferent de modul de prindere al piesei, deformația efectivă totală în punctul de contact piesă-sculă este reprezentată de cumulul (micro)deplasărilor distincte cu cauze multiple și diferite.

where:

$y_{STE}$  – the size of the strain measured with the part, which occurs when there is established a certain duty;

$F$  – the total cutting force (according to STAS 6599/4 – 89);

$R_{STE}$  – the effective rigidity of the machine-tool during the cutting process, with direct influence over the part that is being machined.

The accurate part form can be considered to have been accomplished if the machining error in longitudinal section and in cross-section remains constant during machining, and mention should be made that the machining accuracy is also function of the static balancing of the semi-finished product. The problem of the error in cross-section occurs only in connection with the way of the part fixing in the universal lathe (a case when there may occur the precessional motion of the semi-finished product axis, which drastically limits the cutting force).

The maximum admissible working force  $F_e (F_c)$  becomes, thus, a reference force which depends on the following:

- the geometrical form of the semi-finished product (defined by the length  $l (l_i)$  and diameter  $\Phi (\Phi_{i,})$ , with reference to the part steps, if they exist);
- the way of the semi-finished product fixing, the increasing order of the maximum admitted forces comprising the following:
  - I. the fixing in the universal lathe (U);
  - II. the fixing between centres (V);
  - III. the fixing in the universal lathe and the fixing between centres, *i.e.* combined fixing (C).
- the momentary position of the tool as compared to the axis of the semi-finished product and the origin of the coordinates system where it is situated;
- the semi-finished product force of inertia (which is important with the heavy parts, and mostly with those fixed in the universal lathe);
- the temperature strain of STE elements (differentiated according to value but also according to importance, from element to element), the effect being more highlighted in case the spindle sleeve is blocked when working.

Since the moving part undergoes a complex service stress, it is desired that the function which describes the total cutting force become “the reference” for the adaptive control. Whatever the way of the part fixing, the total effective strain in the part-tool contact point is represented by cumulating of the distinct (micro) displacements with multiple and various causes.

Sub influența forțelor și deplasărilor ce intervin pe timpul prelucrării, elementele STE pot prezenta deformații elastice, fapt ce ar afecta în mod direct precizia și calitatea suprafeței prelucrate, și chiar capacitatea de producție a mașinii. Astfel, în cazul prinderii piesei între vârfuri, deformația totală (inclusiv a elementelor STE) în raport cu baza (batiul mașinii) se poate evalua, conform cu figura 1, ca fiind:

$$y_{STE} = y_m + y_d + y_s + y_p \quad (2)$$

unde:  $y_m$  – deformația mașinii (strungului);  
 $y_d$  – deformația dispozitivului;  
 $y_s$  – deformația sculei;  
 $y_p$  – deformația piesei.

Dacă forța totală de aşchiere este apreciabilă și constantă în lungul piesei prelucrate, deformația piesei nu este constantă, dar pentru un anumit 'mod de variație' a forței, deformațiile piesei se pot menține constante, caz ce interesează în special din punctul de vedere al preciziei de prelucrare dar și al modelării forțelor de aşchiere și strângere – subiect și al prezentei lucrări.

Particularitățile care apar se datorează modurilor de prindere (impuse de dimensiunile piesei), dar în principiu, rămâne ca element de bază considerentul conform căruia deformația totală a fibrei medii a piesei este prioritară față de suma deplasărilor elastice ale elementelor STE ale mașinii-unelte în cauză (aici strungul).

STE elements may present elastic strains under the influence of the forces and displacements that occur during machining, which may directly affect the accuracy and the quality of the processed surface, and even the machine production capacity. Thus, in case the part is fixed between centres, the total strain (the strain of STE elements including), as compared to the base (the machine frame), can be assessed according to figure 1, being:

where:  $y_m$  – the machine (lathe) strain;  
 $y_d$  – the device strain;  
 $y_s$  – the tool strain;  
 $y_p$  – the part strain.

If the total cutting force is noticeable and constant along the machined part, the part strain is not constant, but for a certain 'variation way' of the force, the part strains can be maintained constant, a case which is of interest especially from the point of view of the machining accuracy, but also from the point of view of the cutting and clamping forces modelling – which is the subject of this work.

The peculiarities which occur are due to the ways of clamping (required by the part dimensions), but in the main, there can be basically considered that the total strain of the part middle fibre is a priority as compared to the sum of the elastic displacements of STE elements of the given machine-tool (*i.e.* the lathe).

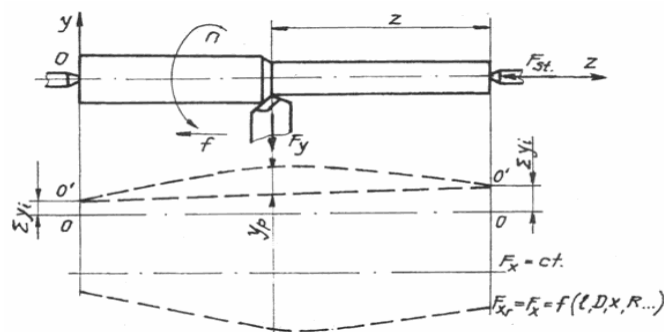


Figura 1. Evidențierea deformației posibile a fibrei medii a unei piese, supuse prelucrării  
 Figure 1. The highlighting of the total possible strain of the part axis, during machining

a) Deformația strungului  $y_m$  – elementul esențial ca pondere în apariția erorilor de prelucrare datorat rigidităților (diferite) păpușii fixe, păpușii mobile și căruciorului, mari, dar nu infinite. Deformațiile se pot măsura în timpul aşchierii, pe strungul concret stabilit (sau precizate în cartea tehnică). De regulă, valoarea acestei deformații se consideră constantă.

a) The lathe strain  $y_m$  – the essential element as weight in the occurrence of the machining errors due to the (various) rigidities of the fast headstock, the loose headstock, and the slide, great, but not infinite. The strains can be measured during cutting on the chosen lathe (or specified in the operator's handbook). As a rule, the value of this strain is considered to be constant.

- b) Deformația piesei  $y_p$  – în această situație, se urmărește ca forța echivalentă  $F_e$  care acționează asupra piesei să nu producă fenomene de instabilitate sau deformații la rotațiile piesei pe timpul prelucrării. Trebuie luat în considerare că, de fapt, asupra piesei acționează o forță echivalentă diferită de cea considerată inițial.
- c) Deformațiile dispozitivului  $y_d$  și sculei  $y_s$  – de regulă, prin construcția lor, dispozitivele de fixare a sculelor pe mașină au o rigiditate suficient de mare. Având în vedere efectele negative – pentru precizia de prelucrare obținută – ce apar la folosirea în SCA a unor portcuțite cu rigiditate variabilă, apare cu atât mai importantă găsirea unor soluții de principiu și constructive la aceste dispozitive, care să permită măsurarea componentelor forței de așchiere, fără însă ca prin aceasta dispozitivele să devină punctul nevralgic (din punct de vedere al rigidității) din STE.
- b) The part strain  $y_p$  – in this situation it is aimed that the equivalent force  $F_e$ , which acts upon the part, will not produce instability phenomena or strains when the part rotates during machining. In fact, there has to be taken into account that an equivalent force different from the initially considered one act upon the part.
- c) The strains of the device  $y_d$  and of the tool  $y_s$  – as a rule, through their construction, the devices for the tools fixing on the machine have a rather great rigidity. Taking into account the negative effects – for the obtained machining accuracy – which occur when using in SCA some tool holders with variable rigidity, it is of ever greater importance to find some solutions of principle and construction for these devices that enable the measuring of the cutting force components, without making the devices become the sore point (from the point of view of rigidity) in STE.

### 2.3. Considerații privind calculul reacțiunilor și a forțelor critice de flambaj

La calculul reacțiunilor determinate de forțele de așchiere la vârful sculei așchietoare și în dispozitivele de prindere, pentru fiecare variantă în parte s-au luat în considerare mai multe situații generate de poziția vârfului sculei așchietoare în lungul piesei prelucrate și de forma piesei. Aceste calcule s-au efectuat pe baza ecuației diferențiale de ordin 2 a liniei elastice integrată după metoda Euler [3, 4].

#### 2.3.1. Piesa prinsă în universal (I)

##### 1. Calculul reacțiunilor

Figura 2, permite scrierea ecuațiilor de echilibru ale forțelor și momentelor pentru determinarea reacțiunilor; distanța la care se consideră vârful cuțitului este notată cu  $x$ .

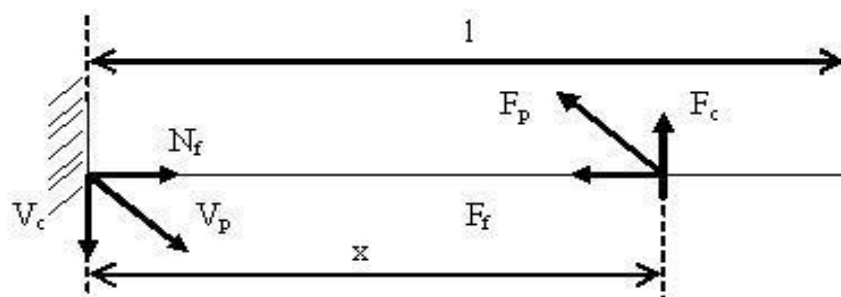


Figura 2. Schemă simplificată pentru calculul reacțiunilor unei piese prinse în universal  
Figure 2. Simplified scheme for strokes computation of a part fixed in the universal lathe

### 2.3. Considerations concerning the computation of the back strokes and of the critical buckling loads

At the computation of the back strokes brought about by the cutting forces at the peak of the cutting tool and in the fixing devices, for each variant separately, there have been taken into account several situations generated by the position of the cutting tool along the part that is being machined and by the part form. These computations have been carried out on the basis of the quadratic differential equation of the elastic line integrated according to Euler method [3, 4].

#### 2.3.1. The part fixed in the universal lathe (I)

##### 1. The computation of the back strokes

Figure 2 enables the writing of the equilibrium equations of the forces and moments for determining the back strokes; the distance taken into account for the cutter peak is noted with  $x$ .

$$\sum F_f = 0 \quad N_f - F_f = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_p = 0 \quad V_p - F_p = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_c = 0 \quad V_c - F_c = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_f = 0 \quad M_f = 0 \quad (6)$$

$$\sum M_p = 0 \quad M_p - F_p x = 0 \quad (7)$$

$$\sum M_c = 0 \quad M_c - F_c x = 0 \quad (8)$$

## 2. Calculul forței de flambaj

### a) Cazul piesei cu un singur tronson

Vom considera starea deformată a piesei supuse prelucrării, modelată ca o grindă încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt, conform figurii 3, urmărind metodologia cazului trei de flambaj după Euler [3, 4].

## 3. The computation of the buckling load

### a) The case of the part with one section

There will be taken into account the strained state of the part that is being machined, modelled as a beam fixed at one end, and free at the other end, according to figure 3, by applying the methodology of the buckling case three, according to Euler [3, 4].

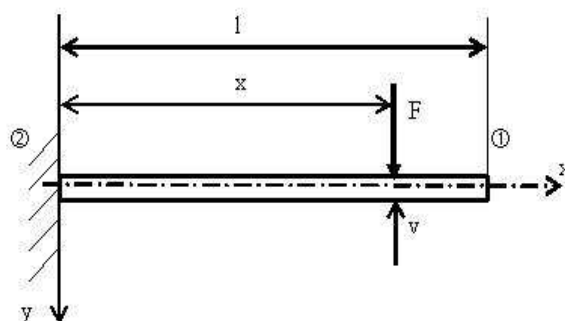


Figura 3. Piesă cilindrică simplă  
Figure 3. Simple cylindrical part

Ecuția diferențială a fibrei medii deformată este:

The differential equation of the strained middle fibre is as follows:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_i(x)}{EI_z(x)} \quad (9)$$

unde:

$M_i(x)$  – este legea de variație a momentului încovoietor pe tronsonul considerat;  
 $EI_z(x)$  – rigiditatea la încovoiere a grinzii, constantă pe un tronson, dar variabilă în trepte pe lungimea grinzii.

where:

$M_i(x)$  – is the variation law of the bending moment on the section taken into account;  
 $EI_z(x)$  – is the beam bending rigidity, which is constant on one section, but varies in steps along the beam;

Menționăm că s-au făcut următoarele notații, care s-au păstrat și în continuare (la celelalte cazuri):

Mention should be made that there have been made the following notations which have been used below (for the other cases), as well:

- $F_f$  – forța de avans;
- $F_c$  – forța de așchiere
- $v$  – săgeata din punctul de acționare al forței de așchiere ( $y_p$ )
- $f$  – săgeata maximă a piesei
- $l_i$  – lungimea tronsonului  $i$

- $F_f$  – the feed force;
- $F_c$  – the cutting force
- $v$  – the arrow from the point of the cutting force operation ( $y_p$ )
- $f$  – the part maximum arrow
- $l_i$  – the section length  $i$

$$M_i(x) = -M_0 + Fx \quad (10)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_i(x)}{EI} \quad (11)$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M_0 - Fx \quad (12)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_0 - Fx}{EI} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{-Fx^2}{2EI} + \frac{M_0x}{EI} + C_1 \quad (14)$$

$$\Rightarrow v = \frac{-Fx^3}{6EI} + \frac{M_0x^2}{2EI} + C_1x + C_2 \quad (15)$$

Prin urmare obținem un sistem de două ecuații cu două necunoscute:  $C_1$ ,  $C_2$ , pe care-l vom rezolva punând condițiile la limită. Condițiile la limită sunt:

I.  $x = 0, \quad v = 0$

Consequently, there is obtained a system of two equations with two unknowns:  $C_1$ ,  $C_2$ , which will be solved by using terminal conditions. The terminal conditions are as follows:

I.  $x = 0, \quad v = 0$

$$0 = \frac{-Fl^3}{6EI} + \frac{M_0l^2}{2EI} + C_1l + C_2 \quad (16)$$

II.  $x = l, \quad \frac{dv}{dx} = 0$

II.  $x = l, \quad \frac{dv}{dx} = 0$

$$0 = \frac{-Fl^2}{2EI} + \frac{M_0l}{EI} + C_1 \quad (17)$$

Sistemul, prin a cărui rezolvare obținem valoarea constantelor  $C_1$ ,  $C_2$ , se scrie sub următoarea formă matriceală:

The system, by whose solving there is obtained the value of  $C_1$ ,  $C_2$ , constants, will be written under the following matrix form:

$$\begin{bmatrix} l & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Fl^3}{6EI} - \frac{M_0l^2}{2EI} \\ \frac{Fl^2}{2EI} - \frac{M_0l}{EI} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Calculul constantelor  $C_1$  și  $C_2$  permit calculul ecuației fibrei medii, ecuație care este de forma:

The computations of  $C_1$  and  $C_2$  constants enable the computation of the equation of the middle fibre, an equation of the following form:

$$v = \frac{-Fx^3}{6EI} + \frac{M_0x^2}{2EI} + C_1x + C_2 \quad (19)$$

**b) Cazul piesei cu două tronsoane**

Și în acest caz vom considera starea deformată a piesei supuse prelucrării, modelată ca o grindă încastrată la un capăt și liberă la celălalt capăt, conform figurii 4.

**b) The case of the part with two sections**

In this case there will be also taken into account the strained state of the part which is being machined, modelled as a beam fixed at one end, and free at the other end, according to figure 4.

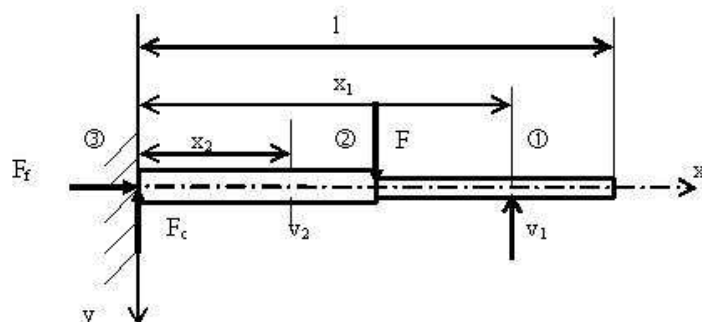


Figura 4. Piesă în trepte cu 2 tronsoane  
Figure 4. Piece in steps with 2 sections

- Pentru tronsonul (3 – 2) se scrie ecuația:
- For section (3 – 2), there will be written the following equation:

$$M_i(x_2) = -M_3 + F_c x_2 + F_f v_2 \quad (20)$$

Din ecuațiile de echilibru static se deduce:

Out of the static balance equations, there can be deduced the following:

$$\sum M_3 = 0 \Leftrightarrow M_3 + M_0 - F_c l_2 - F_f f = 0 \quad (21)$$

Înlocuind în ecuația (20) se obține:

By making the replacements in equation (20), the following can be obtained:

$$M_i(x_2) = M_0 - F_c l_2 - F_f f + F_c x_2 + F_f v_2 \quad (22)$$

$$EI_2 \frac{d^2 v_2}{dx_2^2} + F_f v_2 = -M_0 + F_c l_2 + F_f f - F_c x_2 \quad (23)$$

Se fac notațiile:

There can be noted:

$$\alpha_2^2 = \frac{F_f}{EI_2} \quad (24)$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx_2^2} + \alpha_2^2 v_2 = \frac{-M_0 + F_c l_2 + F_f f}{EI_2} - \frac{F_c}{EI_2} x_2 \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_2 = C_1 \sin \alpha_2 x_2 + C_2 \cos \alpha_2 x_2 + \frac{F_c l_2 + F_f f - M_0}{F_f} - \frac{F_c}{F_f} x_2 \\ \frac{dv_2}{dx_2} = \alpha_2 C_1 \cos \alpha_2 x_2 - \alpha_2 C_2 \sin \alpha_2 x_2 - \frac{F_c}{F_f} \end{array} \right. \quad (26)$$

- Pe tronsonul (2 – 1) avem:
- On section (2 – 1), there are the following:

$$M_i(x_1) = -M_3 + F_c x_1 + F_f v_1 \quad (27)$$

$$M_i(x_1) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx_2^2} = 0 \quad (29)$$



Obținem:

There will be obtained that:

$$\begin{cases} v_1 = C_3 x_1 + C_4 \\ \frac{dv_1}{dx_1} = C_3 \end{cases} \quad (30)$$

Prin urmare se obține un sistem de patru ecuații cu cinci necunoscute:  $C_1, C_2, C_3, C_4, f$ , care se rezolvă punând condițiile la limită. Condițiile la limită sunt:

I.  $x_2 = 0, v_2 = 0$

Consequently, there will be obtained a system of four equations with five unknowns:  $C_1, C_2, C_3, C_4, f$ , which will be solved by putting terminal conditions. The terminal conditions are as follows:

I.  $x_2 = 0, v_2 = 0$

$$0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + \frac{F_c l_2 + F_f f - M_0}{F_f} \quad (31)$$

II.  $x_2 = 0, \frac{dv_2}{dx_2} = 0$

II.  $x_2 = 0, \frac{dv_2}{dx_2} = 0$

$$0 = \alpha_2 C_1 \cos 0 - \alpha_2 C_2 \sin 0 - \frac{F_c}{F_f} \quad (32)$$

III.  $x_1 = l_2, v_1 = v_2$   
 $x_2 = l_2$

III.  $x_1 = l_2, v_1 = v_2$   
 $x_2 = l_2$

$$C_1 \sin \alpha_2 l_2 + C_2 \cos \alpha_2 l_2 - C_3 l_2 - C_4 + f = \frac{M_0}{F_f} \quad (33)$$

IV.  $x_1 = l_2, \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{dv_2}{dx_2}$   
 $x_2 = l_2$

IV.  $x_1 = l_2, \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{dv_2}{dx_2}$   
 $x_2 = l_2$

$$\alpha_2 C_1 \cos \alpha_2 l_2 - \alpha_2 C_2 \sin \alpha_2 l_2 - C_3 = \frac{F_c}{F_f} \quad (34)$$

V.  $x_1 = l_2, v_1 = f$

V.  $x_1 = l_2, v_1 = f$

$$f = C_3 l_2 + C_4 \quad (35)$$

Sistemul, prin a cărui rezolvare se obține valoarea constantelor  $C_1, C_2, C_3, C_4, f$ , se scrie sub următoarea formă matriceală:

The system, by whose solving there will be obtained the value of  $C_1, C_2, C_3, C_4, f$  constants, will be written under the following matrix form:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_2 l_2 & \cos \alpha_2 l_2 & -l_2 & -1 & 1 \\ \alpha_2 \cos \alpha_2 l_2 & -\alpha_2 \sin \alpha_2 l_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_0 - F_c l_2}{F_f} \\ \frac{F_c}{F_f} \\ \frac{M_0}{F_f} \\ \frac{F_c}{F_f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

c) Cazul piesei cu trei tronsoane: figura 5

- Pe tronsonul (4 – 3) avem:

c) The case of the part with three sections: figure 5

- On section (4 – 3), there is the following:

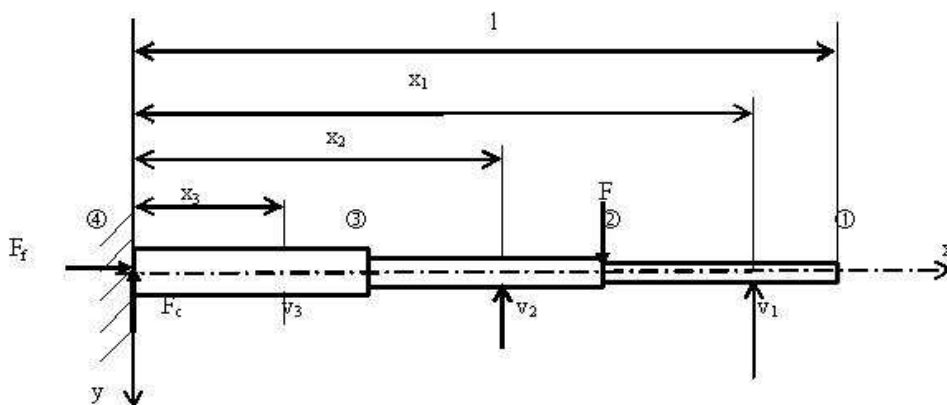


Figura 5. Piesă în trepte cu 3 tronsoane  
Figure 5. Piece in steps with 3 sections

$$M_i(x_3) = -M_4 + F_c x_3 + F_f v_3 \quad (37)$$

Din ecuația de echilibru static:

Out of the static balance equation:

$$\sum M_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_4 + M_0 - F_c(l_3 + l_2) - F_f \cdot f = 0 \quad (38)$$

$$\Rightarrow \quad M_i(x_3) = M_0 + F_c x_3 - F_c(l_2 + l_3) - F_f f + F_f v_3 \quad (39)$$

$$EI_3 \frac{d^2 v_3}{dx_3^2} = -M_0 - F_c x_3 + F_c(l_2 + l_3) + F_f f - F_f v_3 \quad (40)$$

$$\frac{d^2 v_3}{dx_3^2} + \alpha_3^2 v_3 = \frac{F_f f - M_0 + F_c(l_2 + l_3)}{EI_3} - \frac{F_c}{EI_3} x_3 \quad (41)$$

unde notăm:

where the following will be noted:

$$\alpha_3^2 = \frac{F_f}{EI_3} \quad (42)$$

$\Rightarrow$  soluția ecuației diferențiale omogene:

$\Rightarrow$  the solution of the homogeneous differential equation:

$$v_3 = C_1 \sin \alpha_3 x_3 + C_2 \cos \alpha_3 x_3 + \frac{F_f f - M_0 + F_c(l_2 + l_3)}{F_f} - \frac{F_c}{F_f} x_3 \quad (43)$$

$$\frac{dv_3}{dx_3} = C_1 \alpha_3 \cos \alpha_3 x_3 - C_2 \alpha_3 \sin \alpha_3 x_3 - \frac{F_c}{F_f} \quad (44)$$

• Pe tronsonul (3 – 2) avem:

• On section (3 – 2), there is the following:

$$M_i(x_2) = -M_4 + F_c x_2 + F_f v_2 = M_0 - F_c(l_2 + l_3) - F_f f + F_c x_2 + F_f v_2 \quad (45)$$

$$EI_2 \frac{d^2 v_2}{dx_2^2} = -M_0 + F_c(l_2 + l_3) + F_f f + F_c x_2 - F_f v_2 \quad (46)$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx_2^2} + \alpha_2^2 v_2 = \frac{F_f f - M_0 + F_c(l_2 + l_3)}{EI_2} - \frac{F_c}{EI_2} x_2 \quad (47)$$

unde notăm:

where the following will be noted:

$$\alpha_2^2 = \frac{F_f}{EI_2} \quad (48)$$

⇒ soluția:

⇒ solution:

$$v_2 = C_3 \sin \alpha_2 x_2 + C_4 \cos \alpha_2 x_2 + \frac{F_f f - M_0 + F_c (l_2 + l_3)}{F_f} - \frac{F_c}{F_f} x_2 \quad (49)$$

$$\frac{dv_2}{dx_2} = C_3 \alpha_2 \cos \alpha_2 x_2 - C_4 \alpha_2 \sin \alpha_2 x_2 - \frac{F_c}{F_f} \quad (50)$$

• Pe tronsonul (2 – 1) avem:

• On section (2 – 1), there is the following:

$$M_i(x_1) = -M_4 + F_c x_1 + F_f v_1 \quad (51)$$

$$M_i(x_1) = 0 \quad (52)$$

$$\frac{d^2 v_1}{dx_1^2} = 0 \quad (53)$$

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx_1} = C_5 \\ v_1 = C_5 x_1 + C_6 \end{cases} \quad (54)$$

Condițiile la limită sunt:

The terminal conditions are as follows:

I.  $x_3 = 0, v_3 = 0$

I.  $x_3 = 0, v_3 = 0$

$$\Rightarrow C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + \frac{F_f f - M_0 + F_c (l_2 + l_3)}{F_f} = 0 \quad (55)$$

$$C_2 + f = \frac{M_0 - F_c (l_2 + l_3)}{F_f} \quad (56)$$

II.  $x_3 = 0, \frac{dv_3}{dx_3} = 0$

II.  $x_3 = 0, \frac{dv_3}{dx_3} = 0$

$$\Rightarrow C_1 \alpha_3 \cos 0 - C_2 \alpha_3 \sin 0 - \frac{F_c}{F_f} = 0 \quad (57)$$

$$C_1 \alpha_3 = \frac{F_c}{F_f} \quad (58)$$

Condiții de continuitate:

Conditions for continuity:

III. pt  $x_3 = l_3$  și  $x_2 = l_3 \Rightarrow v_3 = v_2$

III. for  $x_3 = l_3$  and  $x_2 = l_3 \Rightarrow v_3 = v_2$

$$\Rightarrow C_1 \sin \alpha_3 l_3 + C_2 \cos \alpha_3 l_3 + \frac{F_f f - M_0 + F_c (l_2 + l_3)}{F_f} - \frac{F_c}{F_f} l_3 = \quad (59)$$

$$C_3 \sin \alpha_2 l_3 + C_4 \cos \alpha_2 l_3 + \frac{F_f f - M_0 + F_c (l_2 + l_3)}{F_f} - \frac{F_c}{F_f} l_3$$

$$C_1 \sin \alpha_3 l_3 + C_2 \cos \alpha_3 l_3 - C_3 \sin \alpha_2 l_3 - C_4 \cos \alpha_2 l_3 = 0 \quad (60)$$

$$\text{IV. pt } x_3 = l_3 \text{ și } x_2 = l_3 \Rightarrow \frac{dv_3}{dx_3} = \frac{dv_2}{dx_2} \quad \text{IV. for } x_3 = l_3 \text{ and } x_2 = l_3 \Rightarrow \frac{dv_3}{dx_3} = \frac{dv_2}{dx_2}$$

$$C_1 \alpha_3 \cos \alpha_3 l_3 - C_2 \alpha_3 \sin \alpha_3 l_3 - \frac{F_c}{F_f} = C_3 \alpha_2 \cos \alpha_2 l_3 - C_4 \alpha_2 \sin \alpha_2 l_3 - \frac{F_c}{F_f} \quad (61)$$

$$C_1 \alpha_3 \cos \alpha_3 l_3 - C_2 \alpha_3 \sin \alpha_3 l_3 - C_3 \alpha_2 \cos \alpha_2 l_3 + C_4 \alpha_2 \sin \alpha_2 l_3 = 0 \quad (62)$$

$$\text{V. pt } x_3 = l_3 + l_2 \text{ și } x_2 = l_3 + l_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \quad \text{V. for } x_3 = l_3 + l_2 \text{ and } x_2 = l_3 + l_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

$$C_3 \sin \alpha_2 (l_3 + l_2) + C_4 \cos \alpha_2 (l_3 + l_2) + \frac{F_x f - M_0 + F_y (l_2 + l_3)}{F_x} - \frac{F_y}{F_x} (l_3 + l_2) =$$

$$= C_5 (l_3 + l_2) + C_6 \quad (63)$$

$$\Rightarrow C_3 \sin \alpha_2 (l_3 + l_2) + C_4 \cos \alpha_2 (l_3 + l_2) - C_5 (l_3 + l_2) - C_6 + f = \frac{M_0}{F_f} \quad (64)$$

$$\text{VI. pentru } x_3 = l_3 + l_2 \text{ și } x_2 = l_3 + l_2 \Rightarrow \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{dv_2}{dx_2} \quad \text{VI. for } x_3 = l_3 + l_2 \text{ and } x_2 = l_3 + l_2 \Rightarrow \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{dv_2}{dx_2}$$

$$C_3 \alpha_2 \cos \alpha_2 (l_3 + l_2) - C_4 \alpha_2 \sin \alpha_2 (l_3 + l_2) - C_5 = \frac{F_c}{F_f} \quad (65)$$

$$\text{VII. Săgeata } f = v_2 (l_2 + l_3) \text{ sau } f = v_1 (l_2 + l_3) \quad \text{VII. arrow } f = v_2 (l_2 + l_3) \text{ or } f = v_1 (l_2 + l_3)$$

$$\Rightarrow C_5 (l_3 + l_2) + C_6 = f \quad (66)$$

Sistemul se pune în formă matriceală:

The system will be put in matrix form:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_3 l_3 & \cos \alpha_3 l_3 & -\sin \alpha_2 l_3 & -\cos \alpha_2 l_3 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 \cos \alpha_3 l_3 & -\alpha_3 \sin \alpha_3 l_3 & -\alpha_2 \cos \alpha_2 l_3 & \alpha_2 \sin \alpha_2 l_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha_2 (l_3 + l_2) & \cos \alpha_2 (l_3 + l_2) & -(l_3 + l_2) & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \cos \alpha_2 (l_3 + l_2) & -\alpha_2 \sin \alpha_2 (l_3 + l_2) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (l_3 + l_2) & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 - F_c (l_2 + l_3) \\ F_f \\ \frac{F_c}{F_f} \\ F_f \\ 0 \\ 0 \\ \frac{M_0}{F_f} \\ F_f \\ \frac{F_c}{F_f} \\ F_f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Calculul pentru cele șase constante prezintă ceva dificultăți pe care doar calculatorul le poate soluționa The computation for the six constants has some difficulties that can be dealt with only by the

într-un timp rezonabil și aceasta numai după anumite preparative. Pentru piesele cu patru sau și mai multe tronsoane (ex. arborii cotiți sau alte forme), calculele devin probabil prohibitive chiar și pentru calculatoare dacă ne referim la 'timpul real' motiv pentru care este necesar să se găsească formule aproximante.

### 3. Concluzii

Se constată că dintre toate mărimile măsurabile ale procesului de aşchiere, cea mai fidelă pentru proces, se dovedește a fi forța de aşchiere (prin componentele sale). Alegerea forței de aşchiere, ca mărime de referință programat-controlabilă, prezintă anumite avantaje:

- stabilirea unei încărcări optime a sistemului elastic al mașinii;
- diagnosticarea stării de uzură a cuțitului;
- controlul legat de natura și mărimea autovibrațiilor definind și o lege pentru rigiditatea tehnologică a întregului sistem.

În lucrare s-a urmărit stabilirea expresiilor generale ale deformației fibrei medii, pentru semifabricatul supus prelucrării, în cazul pieselor cu 1 - 3 tronsoane cu prindere doar în universal. Pentru situațiile cu mai mult de 3 tronsoane calculele se complică extrem de mult.

Expresiile analitice ale forței ca funcții tehnologice astfel stabilite, cumulează cât mai multe condiții (în final trebuie toate) pe care urmează să le îndeplinească regimul de aşchiere și constituie de fapt suportul de referință care asigură o încărcare comandată a strungului ducând la eliminarea programării mărimilor cu caracter limitativ. Avantajul deosebit al unei mărimi de referință precise conduce apoi prin posibilitățile actuale ale calculatoarelor la reducerea sau chiar la eliminarea mai multor faze intermediare de lucru la operațiile tehnologice în cauză cu un real aport la productivitatea operației.

Aparenta complexitate a funcțiilor nu ar trebui să mai constituie un impediment în exploatarea avantajelor pe care le prezintă largă lor capacitate de sinteză, a multiplelor aspecte ce caracterizează SE în procesul de strunjire. Bazându-ne pe experimentele efectuate și eventual pe modelarea lor analogică, se pot concepe algoritmi de conducere și comandă în vederea reglării valorii efective a mărimii forței de aşchiere ( $F_c$ ) apropiată de valoarea forței de referință  $F_{ref}$  (dimensional față

computer within a reasonable time, but only after certain preparations. As far as the four or more sections parts (e.g. crankshafts or other forms) are concerned, the computations will probably become prohibitive, even for computers, if we refer to 'real time', a reason which requires the finding out of approximation formulae.

### 3. Conclusions

There has been found out that the quantity most faithful for the process, among all the other measurable quantities of the cutting process, proves to be the cutting force (through its components). The cutting force choosing as the reference programmed-controllable quantity has certain advantages:

- the establishing of an optimum loading of the machine SE;
- the diagnosing of the cutter wear;
- the control connected with the self-vibrations nature and size which also defines a law for the technological rigidity of the whole system.

This work has aimed at establishing the general expressions of the middle fibre strain, for the semi-finished product that is being machined, in the case of parts with 1 - 3 sections fixed only in the universal lathe. As far as the situations with more than 3 sections are concerned, the computations will be extremely complicated.

The analytical expressions of the force as technological functions thus established, cumulate as many conditions as possible (which finally are all of them necessary), and that will have to be fulfilled by the cutting regime and are in fact the reference support which ensures a controlled loading of the lathe, leading to the elimination of the programming of the quantities with limitative character. The particular advantage of an accurate reference quantity leads then, through the today's computer possibilities, to the reduction or even to the elimination of several intermediary working stages at the given technological operations, resulting in an actual contribution to the productivity of the operation.

The apparent complexity of the functions should not be an impediment in the exploitation of the advantages of their large capacity of synthesis, of the multiple aspects that characterize SE in the turning process. On the basis of the experiments that have been carried out, and eventually on their analogical modelling, there can be formulated driving and control algorithms with a view to adjust the effective value of the cutting force size ( $F_c$ ) close to the value of the reference force  $F_{ref}$

de piesă și temporal față de proces). De modul în care sistemul și algoritmul implementat hard și soft reușește să execute acest lucru, depinde evident, încărcarea strungului (utilizarea completă a capacității SE) cu condiția asigurării preciziei de prelucrare și / sau a altor factori de calitate și cost.

(dimensionally, as compared to the part, and temporally, as compared to the process). Obviously, the lathe loading (the complete use of SE capacity), on condition of the operating accuracy and/or other quality and cost factors assurance, depends on the way the implemented system and algorithm hardware and software succeeds to execute this thing.

### References

1. Brăgaru, A., Picoș, C., Ivan, N.: *Optimizarea proceselor tehnologice și a echipamentelor (The optimization of the technological processes and equipments)*. Editura Didactică și Pedagogică, ISBN 973-30-4447-4, Bucharest, 1996 (in Romanian)
2. Dodon, E.: *Mașini-unelte și agregate (Machine-tools and aggregates)*. Politehnica Timișoara University Press, C.Z.U. - 621.9(075.8), Timișoara, Romania, 1988 (in Romanian)
3. Dobre, I., Moțica, A.: *Rezistența materialelor; plasticitate, elasticitate (Material strength; plasticity, elasticity)*. Editura de Vest, ISBN 973336-0301-5, Timișoara, 1997 (in Romanian)
4. Ponomariov, S.D., a.o.: *Calculul de rezistență în construcția de mașini (The strength computation in machine building)*. Editura Tehnică, C.Z.U. -539.4 621.81 Bucharest, 1960 (translation from Russian) (in Romanian)
5. Balan, M.: *Rezistența materialelor (Material strength)*. Editura Matrixrom, C.Z.U. -539.4, Bucharest, 2006 (in Romanian)

Lucrare primită în Iunie 2009

Received in June 2009