

HIPOCICLOIDE SFERICE ȘI O APLICAȚIE TEHNICĂ: AUTOMATE HIPOCICLOIDALE SFERICE PENTRU PRESARE LA RECE

SPHERICAL HYPOCYCLOIDS AND A TECHNICAL APPLICATION: SPHERICAL HYPOCYCLOIDAL AUTOMATIC MACHINES FOR COLD FORMING

Romeo CIOARĂ

Transilvania University of Brasov, Romania

Rezumat. Automatele hipocicloidale plane, ce formează o întreagă familie, este un concept românesc original dezvoltat la Universitatea Transilvania din Brașov.

Cercetări recente subliniază posibilitatea extinderii conceptului către un nou subgrup, foarte divers, acela de automate hipocicloidale spațiale sferice. În lanțul cinematic principal al acestor mașini este inclus un mecanism planetar cu roți dințate conice generator de traiectorii (hipo)cicloidale spațiale sferice, ca mecanism de transformare a mișcării de rotație a arborelui principal în mișcări de translație rectilinie-alternativă, cu autoîntoarcere, periodică și temporară, a culisoarelor.

Lucrarea de față își propune să prezinte baza teoretică pentru stabilirea parametrilor cinematici ai acestor mașini, adică expresiile de spațiu, viteză și accelerație ale culisoarelor. Pentru aceasta este necesară cunoașterea ecuației (hipo)cicloidei spațiale sferice. Este vizată cu prioritate subclasa automatelor hipocicloidale sferice ecuatoriale, considerate a fi cele mai adecvate pentru aplicații practice.

Cuvinte cheie: cicloide spațiale sferice, automate de presare la rece, parametri cinematici

1. Introducere

Sunt cunoscute automate hipocicloidale plane pentru presare la rece [1, 2, 3]. Aceste mașini utilizează ca traiectorie a elementului antrenor al culisoarelor o hipocicloidă plană unicursală.

Hipocicloidele plane sunt generabile cu ajutorul mecanismelor planetare cu roți dințate cilindrice, cu angrenare interioară, la care roata centrală este fixă. Astfel de mecanisme sunt utilizate la automate hipocicloidale plane ca mecanisme de transformare a mișcării de rotație a arborelui principal în mișcare de translație rectilinie-alternativă cu autoîntoarcere, periodică și temporară, a culisoarelor acestor mașini.

Este identificată posibilitatea construirii de automate hipocicloidale spațiale (AHS), cu structură și mod de funcționare principal identice automatelor hipocicloidale plane [4, 5]. La AHS se utilizează ca mecanism de transformare un mecanism planetar cu roți dințate conice, roata centrală fiind fixă.

Lucrarea de față își propune să prezinte baza teoretică pentru stabilirea parametrilor cinematici ai unor astfel de mașini, adică expresiile de spațiu,

Abstract. Plane hypocycloidal automatic machines, which form an entire family, are a Romanian original concept developed at Transilvania University of Brasov.

Recent researches have enhanced the concept development towards a very diverse new sub-group, the spatial spherical hypocycloidal automata. In the main kinematic chain of these machines, a planetary gear with conical wheels is included, generating spatial spherical (hypo)cycloidal trajectories, as transformation mechanism of the rotation motion of the main shaft, in rectilinear-alternative translation movements, with periodical and temporary self-return of the slide-blocks.

The paper herein sets out to submit the theoretical basis for determining the kinematic parameters of these machines, namely the space, speed and acceleration expressions of the slide-blocks. To this purpose, one must know the equation of the spatial spherical (hypo)cycloid. The class of the equatorial spherical hypocycloidal automatic machines is pre-eminently targeted, deemed the most adequate for practical applications.

Key words: spatial spherical cycloids, automatic machines for cold forming, kinematic parameters

1. Introduction

The plane hypocycloidal automatic machines for cold forming are known [1, 2, 3]. They use a unicursal plane hypocycloid as trajectory of the driving element of the slide-blocks.

Plane hypocycloids are generable by planetary gears with cylindrical wheels, with inner gear, whose central wheel is fixed. Such devices are used in plane hypocycloidal automaton as mechanisms for transforming the rotation motion of the main shaft into rectilinear-alternative translation motion, with self-return, of the side-blocks of these machines.

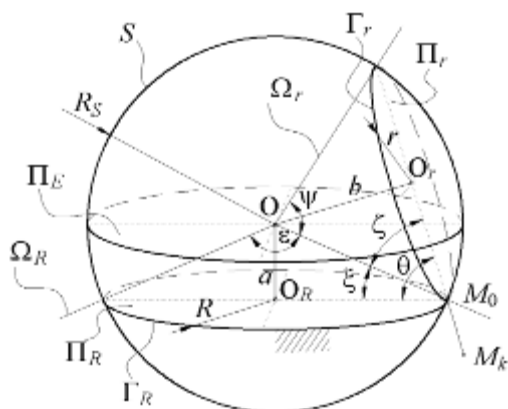
The possibility of constructing spatial hypocycloidal automatic machines (AHS) is identified, identical in structure and operation to plane hypocycloidal automaton [4, 5]. For AHS, a planetary gear with conical wheels, the central wheel being fixed, is used as transformation mechanism.

The paper herein sets out to submit the theoretical basis for determining the kinematic parameters of such machines, namely the space,

viteză și accelerație ale culisoarelor. Pentru aceasta este imperativ necesară cunoașterea ecuației (hipo)cicloidei spațiale sferice.

2. Aspecte generale

Fie două conuri Ω_1 și Ω_2 , tangente și având același vârf O , figura 1. Conul Ω_1 , cu unghiul la vârf ε , este fix, iar conul Ω_2 , cu unghiul la vârf ψ , se rostogolește fără alunecare peste conul Ω_1 . Conul Ω_1 este „con de bază”, iar conul Ω_2 este „con rulant”. Fie și o sferă S de rază R_S și centru O . Intersecția sferei S cu conurile Ω_1 și Ω_2 determină cercurile $\Gamma_1 \equiv \Gamma_R$, de rază R și centru O_R , și respectiv $\Gamma_2 \equiv \Gamma_r$, de rază r și centru O_r . Se notează cu Π_R planul ce conține cercul de bază Γ_R , cu Π_r planul ce conține cercul rulant Γ_r și cu Π_E un plan ecuatorial al sferei, paralel cu planul Π_R și care conține, evident, centrul O al acesteia.



Față de centrul O al sferei S planul Π_R (al cercului de bază Γ_R) se află la o distanță $a \in \mathfrak{R}$, $0 \leq |a| < R$. Dacă $a > 0$ atunci planul Π_R se află sub planul ecuatorial Π_E , caz în care planul Π_R este unul subecuatorial (conul Ω_1 este unul convex, cu unghiul la vârf $0 < \varepsilon < \pi$) (conul rulant se rostogolește peste partea exterioară a conului bază), figura 2a, dacă $a < 0$ atunci planul Π_R se află deasupra planului ecuatorial Π_E , caz în care planul Π_R este unul supraecuatorial (conul Ω_1 este unul concav, cu unghiul la vârf $\pi < \varepsilon < 2\pi$) (conul rulant se rostogolește peste partea interioară a conului bază), figura 2b, iar dacă $a = 0$ atunci planul Π_R se suprapune peste chiar planul ecuatorial Π_E , (conul Ω_1 , cu unghiul la vârf $\varepsilon = \pi$, devine (degenerează într-) un plan, figura 2c.

Notă. Cazurile a) și c) permit „materializarea” conului de bază prin danturi conice. Cazul b) ar însemna con de bază cu dantură conică „interioară”.

Evident, a este distanța dintre planul Π_R și planul ecuatorial Π_E .

speed and acceleration expressions of the side-blocks. To this purpose, one must know the equation of the spatial spherical (hypo)cycloid.

2. General informations

Be Ω_1 și Ω_2 , two tangent cones, with the same peak O , figure 1. Cone Ω_1 , with its apical angle ε , is fixed, and cone Ω_2 , with its apical angle ψ , rolls without sliding over the cone Ω_1 . Cone Ω_1 is a “basic cone” and cone Ω_2 is “rolling cone”. Be also a sphere S of radius R_S and centre O . The intersection of the sphere S with the cones Ω_1 and Ω_2 determines the circles $\Gamma_1 \equiv \Gamma_R$, of radius R and centre O_R , and respectively $\Gamma_2 \equiv \Gamma_r$, of radius r and centre O_r . Let Π_R be the plane containing the basic circle Γ_R , also Π_r the plane containing the rolling circle Γ_r and Π_E an equatorial plane of the sphere, parallel with the plane Π_R obviously containing its centre O .

Figura 1. Sfera S de centru O și rază R_S , conurile Ω_1 și Ω_2 , cercurile Γ_1 și Γ_2 , punctul M_k generator de cicloidă sferică și alte notații

Figure 1. Sphere S of centre O and radius R_S , cones Ω_1 and Ω_2 , circles Γ_1 and Γ_2 , the spherical cycloid-generating point M_k and other notations

From the centre O of the sphere S , the plane Π_R (of the basic circle Γ_R) is at a distance $a \in \mathfrak{R}$, $0 \leq |a| < R$. If $a > 0$ then the plane Π_R is under the equatorial plane Π_E , in which case the plane Π_R is sub-equatorial (the cone Ω_1 is convex, with the apical angle $0 < \varepsilon < \pi$) (the rolling cone over the external part of the basic cone), figure 2a, if $a < 0$ then the plane Π_R is above the equatorial plane Π_E , in which case the plane Π_R is supra-equatorial (cone Ω_1 is concave, with the angle to the peak $\pi < \varepsilon < 2\pi$) (the rolling cone over the internal part of the base-cone), figure 2b, and if $a = 0$ then the plane Π_R overlaps the equatorial plane Π_E , itself (cone Ω_1 , with apical angle $\varepsilon = \pi$, becomes (degenerates into) a plane, figure 2c.

Note. Cases a) and c) allow “materializing” the base cone through bevel-gear-tooth system. Case b) would mean basic cone with “internal” bevel-gear-tooth system.

Obviously, a is the distance between the plane Π_R and the equatorial plane Π_E .

Similar, față de centrul O al sferei S centrul $O_2 \equiv O_r$ al cercului rulant Γ_r se află la o distanță $b \in \mathfrak{R}$, $0 \leq |b| < R_s$. Dacă $b > 0$ atunci conul Ω_2 este unul convex, cu unghiul la vârf $0 < \psi < \pi$) (conul rulant se rostogolește cu partea sa exterioară peste conul de bază), figura 3a, dacă $b < 0$ atunci conul Ω_2 este unul concav, cu unghiul la vârf $\pi < \psi < 2\pi$) (conul rulant se rostogolește cu partea sa interioară peste conul de bază), figura 3b, iar dacă $b = 0$ atunci conul Ω_2 , cu unghiul la vârf $\psi = \pi$, devine (degenerează într-) un plan, figura 3c.

Notă. Cazurile a) și c) permit „materializarea” conului rulant prin danturi conice. Cazul b) ar însemna con rulant cu dantură conică interioară.

Evident, $R \leq R_s$ și $r \leq R_s$.

Între R_s , R , r , a și b există relațiile:

$$|a| = \sqrt{R_s^2 - R^2}; \tag{1}$$

$$|b| = \sqrt{R_s^2 - r^2}. \tag{2}$$

Similarly, from the centre O of the sphere S , the centre $O_2 \equiv O_r$ of the rolling circle Γ_r is at a distance $b \in \mathfrak{R}$, $0 \leq |b| < R_s$. If $b > 0$ then the cone Ω_2 is convex, with apical angle $0 < \psi < \pi$) (the rolling cone with its external part over the base cone), figure 3a, if $b < 0$ then the cone Ω_2 is concave, with apical angle $\pi < \psi < 2\pi$) (the rolling cone with its internal part over the base cone), figure 3b, and if $b = 0$ then the cone Ω_2 , with the angle to the peak $\psi = \pi$, becomes (degenerates) in a plane, figure 3c.

Note. Cases a) and c) allow “materializing” the rolling cone through bevel-gear-tooth systems. Case b) would be rolling cone with internal bevel-gear-tooth system.

Obviously, $R \leq R_s$ and $r \leq R_s$.

Between R_s , R , r , a and b the relations exist.



a)



b)

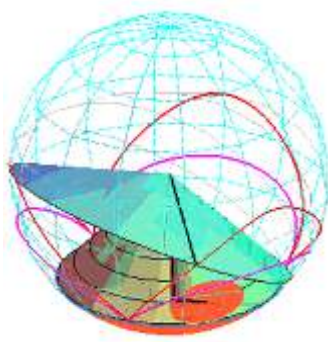


c)

Figura 2. Tipuri de conuri de bază [6]
Figure 2. Types of basic cones [6]



a)



b)



c)

Figura 3. Tipuri de conuri rulante [6]
Figure 3. Types of rolling cones [6]

Cercurile Γ_R și Γ_r sunt permanent tangente. Planul Π_r este înclinat față de planul Π_R , unghiul dintre acestea având o valoare

Circles Γ_R and Γ_r are permanently tangent. Plane Π_r is tilted against the plane Π_R , the angle between them having a value

$$\theta = \operatorname{sgn}(a) \cdot \xi + \operatorname{sgn}(b) \cdot \zeta, \quad 0 < \theta < \pi, \quad (3)$$

unde

where

$$\xi = \arcsin \frac{|a|}{R_S} = \arccos \frac{R}{R_S} = \operatorname{sgn}(a) \cdot \frac{\pi - \varepsilon}{2}; \quad (4)$$

$$\zeta = \arcsin \frac{|b|}{R_S} = \arccos \frac{r}{R_S} = \operatorname{sgn}(b) \cdot \frac{\pi - \psi}{2}. \quad (5)$$

Fie M_0 punctul inițial de tangență dintre cercurile Γ_r și Γ_R ($M_0 \in \Gamma_R$ și $M_0 \in \Gamma_r$) și un punct oarecare M_k solidar cu cercul rulant Γ_r , situat pe (semi)dreapta $O_r M_0$ și aflat față de centrul O_r al cercului Γ_r la distanța $d = \overline{O_r M_k} = k \cdot r$, $k \in \mathfrak{R}^+$.

Notă. Punctul M_k trebuie să fie solidar cu cercul rulant Γ_r , dar fără a se impune strict ca acesta să se afle în planul Π_r al acestui cerc. Însă orice astfel de caz „general” se poate reduce întotdeauna la cazul particular ce corespunde generării cicloidei sferice de către un punct solidar cu un cerc rulant $\Gamma_{r_1} \neq \Gamma_r$, aflat în planul $\Pi_{r_1} \neq \Pi_r$ al acestuia, $\Pi_{r_1} \parallel \Pi_r$, care se rostogolește peste un cerc fix $\Gamma_{R_1} \neq \Gamma_R$ cuprins într-un plan $\Pi_{R_1} \neq \Pi_R$, $\Pi_{R_1} \parallel \Pi_R$, figura 4. Evident, $R_1 \neq R$, $r_1 \neq r$, $k_1 \neq k$.

Be M_0 the initial tangency point between the circles Γ_r and Γ_R ($M_0 \in \Gamma_R$ and $M_0 \in \Gamma_r$) and a certain point M_k solidary with the rolling circle Γ_r , situated on the (semi)right $O_r M_0$ and, from the centre O_r of the circle Γ_r at the distance $d = \overline{O_r M_k} = k \cdot r$, $k \in \mathfrak{R}^+$.

Note. Point M_k must be solidary with the rolling circle Γ_r , without the strict necessity for this one to be in the plane Π_r of this circle. However, any such “general” case can be always reduced to the particular case corresponding to the spherical cycloid-generation by a point solidary with a rolling circle $\Gamma_{r_1} \neq \Gamma_r$, in the plane $\Pi_{r_1} \neq \Pi_r$ of this one, $\Pi_{r_1} \parallel \Pi_r$, which rolls over a fixed circle $\Gamma_{R_1} \neq \Gamma_R$ within a plane $\Pi_{R_1} \neq \Pi_R$, $\Pi_{R_1} \parallel \Pi_R$, figure 4. Obviously, $R_1 \neq R$, $r_1 \neq r$, $k_1 \neq k$.

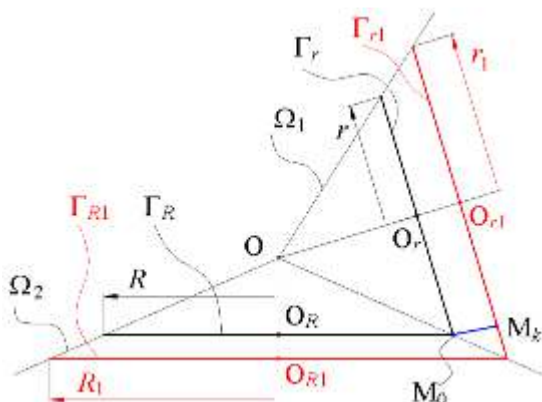


Figura 4. Cercurile de bază și rulant când $M_k \notin \Gamma_r$
Figure 4. Basic and rolling circles when $M_k \notin \Gamma_r$

În urma rostogolirii fără alunecare a cercului rulant Γ_r peste cercul de bază Γ_R , punctele cercului rulant Γ_r (inclusiv M_0) descriu cicloide sferice normale identice, dar defazate între ele în raport cu o direcție (anume) din planul Π_R , deci și în raport cu o direcție similară din planul Π_E . Punctele M_k din planul Π_r , altele decât cele aparținând cercului Γ_r , descriu cicloide sferice scurtate, dacă $0 < k < 1$, normale, dacă $k = 1$, sau alungite, dacă $k > 1$. Pentru $k = 0$, punctul M_k se suprapune peste centrul O_r al cercului rulant Γ_r și descrie un cerc, care poate fi considerat o cicloidă sferică scurtată complet degenerată.

Aceste curbe sunt hipocicloide sferice, dacă $0 < \theta < \pi/2$, elice sferice, dacă $\theta = \pi/2$, sau

After the rolling without sliding of the rolling circle Γ_r over the basic circle Γ_R , the rolling-circle points Γ_r (inclusively M_0) describe identical normal spherical cycloids, but out of phase with each other in relation to a (certain) direction in the plane Π_R , therefore also in relation to a similar direction in the plane Π_E . Points M_k in the plane Π_r , other than those pertaining to the circle Γ_r , describe shortened spherical cycloids, if $0 < k < 1$, normal, if $k = 1$, or elongated, if $k > 1$. For $k = 0$, the point M_k overlaps the centre O_r of the rolling circle Γ_r and describes a circle, which may be deemed a completely degenerated spherical cycloid.

These curves are spherical hypocycloids, if $0 < \theta < \pi/2$, spherical helices, if $\theta = \pi/2$, or

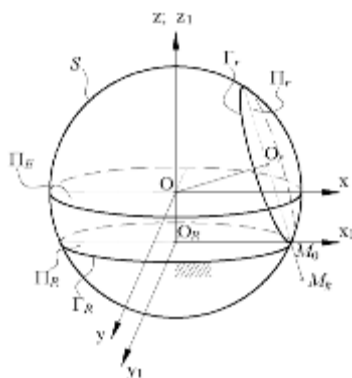
epicicloide sferice, dacă $\pi/2 < \theta < \pi$ [6].

3. Ecuatiile parametrice ale cicloidei sferice

Pentru scrierea ecuațiilor parametrice ale cicloidei sferice se impune determinarea coordonatelor (parametrice ale) punctului generator.

Ecuatia (parametrică a) unei curbe se poate scrie față de un sistem de coordonate oarecare. Fără a restrânge generalitatea, expresia ecuației respective poate avea o formă mai simplă dacă sistemul de coordonate ales este unul particular, favorabil [7].

Formă simplă a ecuației se obține adoptând un sistem de coordonate $O_R x_1 y_1 z_1$ cu originea în centrul O_R al cercului fix (de bază), cu planul $x_1 O_R y_1$ cuprins în planul Π_R al cercului de bază și a cărui axă $O_R x_1$ să conțină punctul M_0 inițial de tangență dintre cercurile Γ_R și Γ_r . Evident, este posibilă scrierea ecuației și într-un sistem de coordonate $Oxyz$, cu originea în centrul O al sferei, cu planul xOy cuprins în planul ecuatorial Π_E și a cărui axă Ox să conțină proiecția în planul Π_E a punctului M_0 inițial de tangență dintre cercurile Γ_R și Γ_r , figura 5. Sistemul de coordonate $Oxyz$ prezintă avantajul de a fi invariant în raport cu sfera S și, în anumite situații este de preferat adoptarea acestuia. Sistemul $O_R x_1 y_1 z_1$ se obține prin simpla translatare a sistemului $Oxyz$ în lungul axei Oz_1 cu cota a , distanța dintre planurile Π_E și Π_R .



spherical epicycloids, if $\pi/2 < \theta < \pi$ [6].

3. Parametric equations of spherical cycloid

So as to write the parametric equations of the spherical cycloids, one must determine the (parametric) coordinates of the generating point.

The (parametric) equation of a curve may be written against a system of coordinates. Without restraining the generality, the expression of the respective equation may have simpler form if the chosen system of coordinates is particular, favourable [7].

The simple form of the equation is obtained by adopting a system of coordinates $O_R x_1 y_1 z_1$ with its origin in the centre O_R of the fixed (base) circle, with the plane $x_1 O_R y_1$ within the plane Π_R of the base circle and its axis $O_R x_1$ containing the initial tangency point M_0 between the circles Γ_R and Γ_r . Obviously, the equation may be also written in a system of coordinates $Oxyz$, with the origin in the centre O of the sphere, with the plane xOy within the equatorial plane Π_E and its axis Ox containing the projection in the plane Π_E of the initial tangency point M_0 between the circles Γ_R and Γ_r , figure 5. The system of coordinates $Oxyz$ has the advantage of being invariant in relation to the sphere S and, in certain situations, is preferable. The system $O_R x_1 y_1 z_1$ is obtained by simply translating the system $Oxyz$ along the axis Oz_1 with the quota a , the distance between the planes Π_E și Π_R .

Figura 5. Sistemele de coordonate $Oxyz$ și $O_R x_1 y_1 z_1$ asociate planelor Π_E și Π_R

Figure 5. Systems of coordinates $Oxyz$ and $O_R x_1 y_1 z_1$ associated to the planes Π_E and Π_R

O cicloidă sferică – scurtată, normală sau alungită, după caz – se obține cinematic, ca traiectorie a unui punct M_k oarecare solidar cu cercul rulant Γ_r și aflat în planul Γ_r al acestuia, ca urmare a rostogolirii fără alunecare a cercului rulant Γ_r peste cercul de bază Γ_R . În acest timp axa OO_r se rotește în jurul axei Oz cu unghiul $\alpha = \alpha(t)$, măsurat ca proiecție în planul xOy .

Ca urmare a rostogolirii fără alunecare a cercului rulant Γ_r peste cercul bază Γ_R , la un moment dat acestea ajung tangente într-un punct $M_\alpha \in \Gamma_R$, $\angle M_0 O_R M_\alpha = \alpha$, punctul $M_0 \in \Gamma_r$ ajunge

A spherical cycloid – shortened or elongated, as appropriate – is kinematically obtained, as trajectory of a point M_k solidary with the rolling circle Γ_r and within its plane Γ_r after the rolling without sliding of the rolling circle Γ_r over the base circle Γ_R . Meanwhile, the axis OO_r rotates round the axis Oz with the angle $\alpha = \alpha(t)$, measured as projection in the plane xOy .

Due to the rolling without sliding of the rolling circle Γ_r over the base circle Γ_R , at a given moment they are tangent in a point $M_\alpha \in \Gamma_R$, $\angle M_0 O_R M_\alpha = \alpha$,

într-o poziție $M_\beta \in \Gamma_r$, $\angle M_\alpha O_r M_\beta = \beta$, iar punctul $M_k \in \Pi_r$ ajunge într-o poziție $M_{k\beta} \in \Pi_r$. Evident, $\angle M_\alpha O_r M_{k\beta} = \beta$.

În aceste condiții, ecuația parametrică a cicloidei este dată de chiar coordonatele punctului $M_{k\beta}$ generator de traiectorie, exprimate în sistemul $Oxyz$. Rostogolirea fără alunecare se exprimă prin egalitatea arcelor de cerc $M_0 M_\alpha \in \Gamma_R$ și $M_\alpha M_\beta \in \Gamma_r$:

$$\overline{M_0 M_\alpha} = \alpha \cdot R = \overline{M_\alpha M_\beta} = \beta \cdot r, \quad (6)$$

de unde rezultă:

$$\beta = \alpha \cdot \frac{R}{r}. \quad (7)$$

Dacă se are în vedere generarea cicloidei utilizând un mecanism planetar cu roți dințate conice, atunci relația anterioară se poate scrie și sub forma

$$\beta = \alpha \cdot \frac{R}{r} = \alpha \cdot \frac{z_R}{z_r} = u \cdot \alpha, \quad (8)$$

unde z_R este numărul de dinți ai danturii roții dințate centrale fixe, z_r este numărul de dinți ai danturii roții satelit, iar $u = z_R/z_r$ reprezintă raportul cinematic interior al angrenajului cu axe fixe asociat mecanismului planetar.

Trebuie precizat că, în general, raportul R/r ia o valoare reală pozitivă oarecare, posibil irațională. La generarea cicloidelor sferice utilizând mecanism planetar cu roți dințate conice, deoarece $z_R \in \mathbb{N}^*$ și $z_r \in \mathbb{N}^*$, se obține implicit că raportul $u = z_R/z_r \in \mathbb{Q}^+$, ceea ce corespunde doar cicloidelor cu număr finit de bucle.

Coordonatele parametrice ale punctului $M_{k\beta}$ se pot obține ca sumă a coordonatelor parametrice ale punctului O_r , scrise în sistemul de coordonate principal $Oxyz$, și ale punctului $M_{k\beta}$, scrise într-un sistem de coordonate secundar cu originea în O_r și cu axele paralele cu axele sistemului de coordonate $Oxyz$.

În sistemul de coordonate principal $Oxyz$, coordonatele punctului $O_r(x_{O_r}, y_{O_r}, z_{O_r})$ sunt:

$$\begin{cases} x_{O_r}(\alpha) = b \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha \\ y_{O_r}(\alpha) = b \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha \\ z_{O_r}(\alpha) = b \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (9)$$

Coordonatele punctului $M_{k\beta}$ se scriu, într-o primă etapă, într-un sistem de coordonate $O_r x' y' z'$ asociat cercului Γ_r , figurile 6 și 7. Planul $x' O_r y'$ este cuprins în planul Π_r , iar axa $O_r x'$ se suprapune cu direcția (instantanee) $O_r M_\alpha$. Axa $O_r y'$ este paralelă cu planul Π_R , deci și cu planul ecuatorial Π_E .

the point $M_0 \in \Gamma_r$ reaches a position $M_\beta \in \Gamma_r$, $\angle M_\alpha O_r M_\beta = \beta$, and the point $M_k \in \Pi_r$ reaches a position $M_{k\beta} \in \Pi_r$. Obviously, $\angle M_\alpha O_r M_{k\beta} = \beta$.

In these conditions, the parametric equation of the cycloid is given by the very coordinates of the trajectory-generating point $M_{k\beta}$, expressed in the system $Oxyz$. The rolling without sliding is expressed through the equality of the arcs $M_0 M_\alpha \in \Gamma_R$ and $M_\alpha M_\beta \in \Gamma_r$:

hence:

Considering the cycloid-generation resorting to a planetary gear with conical wheels, then the previous relation may be written as

where z_R is the teeth number of the fixed central toothed wheel, z_r is the teeth number of the satellite-wheel toothing, and $u = z_R/z_r$ is the internal kinematic ratio of the fixed-axis gear associated to the planetary gear.

Note that, in general, the ratio R/r takes a possibly irrational positive real value. At spherical-cycloid generation, resorting to a planetary gear with conical wheels, as $z_R \in \mathbb{N}^*$ and $z_r \in \mathbb{N}^*$, the ratio is implicitly obtained $u = z_R/z_r \in \mathbb{Q}^+$, which only corresponds to the cycloids with a finite number of loops.

The parametric coordinates of the point $M_{k\beta}$ may be obtained as sum of the parametric coordinates of the point O_r , written in the main system of coordinates $Oxyz$, and of the point $M_{k\beta}$, written in a secondary system of coordinates with the origin in O_r and with parallel axes to the ones of the system of coordinates $Oxyz$.

In the main system of coordinates $Oxyz$, the coordinates of the point $O_r(x_{O_r}, y_{O_r}, z_{O_r})$ are:

The coordinates of the point $M_{k\beta}$ are written, in a first stage, in a system of coordinates $O_r x' y' z'$ associated to the circle Γ_r , figures 6 and 7. The plane $x' O_r y'$ is contained in the plane Π_r , and the axis $O_r x'$ overlaps the (instantaneous) direction $O_r M_\alpha$. The axis $O_r y'$ is parallel to the plane Π_R , hence to the

Sistemul de coordonate $O_r x' y' z'$ se obține prin rotirea cu unghiul $-\beta$ a unui sistem de coordonate $O_r x_0' y_0' z_0'$ solidar cu planul Π_r , a cărui axă $O_r x_0'$ se suprapune peste direcția $O_r M_0$.

equatorial plane Π_E . The system of coordinates $O_r x' y' z'$ is obtained through rotating, with the angle $-\beta$, a system of coordinates $O_r x_0' y_0' z_0'$ solidary with the plane Π_r , whose axis $O_r x_0'$ overlaps the direction $O_r M_0$.

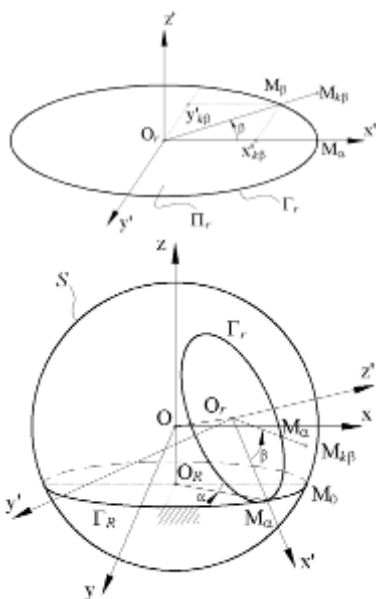


Figura 6. Sistemul de coordonate secundar $O_r x' y' z'$ asociat cercului rulant Γ_r

Figure 6. Secondary system of coordinates $O_r x' y' z'$ associated to the rolling circle Γ_r

Figura 7. Poziția sistemului de coordonate $O_r x' y' z'$ în raport cu sistemul de coordonate $Oxyz$, principal
Figure 7. Position of the system of coordinates $O_r x' y' z'$ in relation to the main system of coordinates $Oxyz$

În sistemul $O_r x' y' z'$ punctul $M_{k\beta}$ are coordonatele:

In $O_r x' y' z'$ the point $M_{k\beta}$ has the coordinates:

$$\begin{cases} x'_{k\beta}(\alpha) = k \cdot r \cdot \cos(-\beta) = k \cdot r \cdot \cos \beta \\ y'_{k\beta}(\alpha) = k \cdot r \cdot \sin(-\beta) = -k \cdot r \cdot \sin \beta \\ z'_{k\beta}(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Pentru a obține coordonatele punctului $M_{k\beta}$ scrise într-un sistem de coordonate cu axele paralele cu cele ale sistemului de coordonate principal $Oxyz$ se face o dublă rotire a sistemului de coordonate $O_r x' y' z'$. Într-o primă etapă, sistemul $O_r x' y' z'$ se rotește față de axa $O_r y'$ cu unghiul θ . Se obține sistemul de coordonate $O_r x'' y'' z''$, figura 8, al cărui plan $O_r x'' y''$ este paralel cu planul Oxy .

In order to obtain the coordinates of the point $M_{k\beta}$ written in a system of coordinates with parallel axes to the ones of the main system of coordinates $Oxyz$, a double rotation of the system of coordinates $O_r x' y' z'$ is made. In a first stage, the system $O_r x' y' z'$ rotates against the axis $O_r y'$ with the angle θ . The system of coordinates $O_r x'' y'' z''$ is obtained, figure 8, whose plane $O_r x'' y''$ is parallel to the plane Oxy .

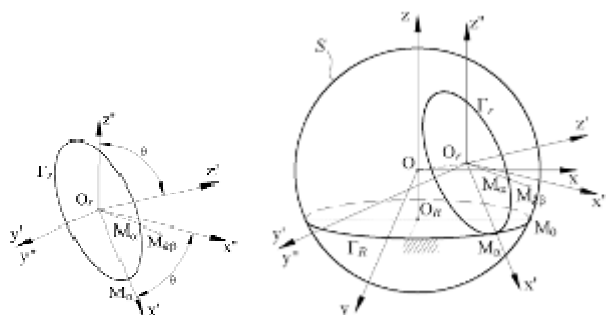


Figura 8. Sistemul de coordonate $O_r x'' y'' z''$ și poziția sa față de sistemul de coordonate principal
Figure 8. System of coordinates $O_r x'' y'' z''$ and its position against the main system of coordinates

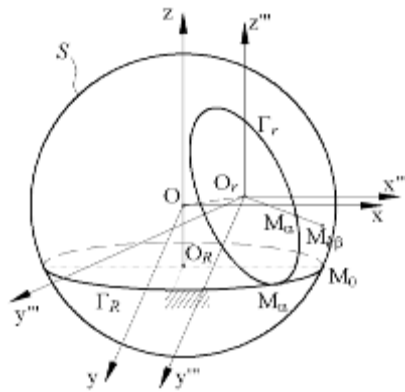
În acest sistem punctul $M_{k\beta}$ are coordonatele:

In this system, the point $M_{k\beta}$ has the coordinates:

$$\begin{bmatrix} x''_{k\beta}(\alpha) \\ y''_{k\beta}(\alpha) \\ z''_{k\beta}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x'_{k\beta}(\alpha) \\ y'_{k\beta}(\alpha) \\ z'_{k\beta}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot r \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta \\ -k \cdot r \cdot \sin\beta \\ -k \cdot r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

Pentru a obține paralelism între axele sistemului secundar și axele sistemului principal Oxyz, sistemul de coordonate $O_r x'' y'' z''$ se rotește în jurul axei $O_r z''$ cu unghiul $-\alpha$. Se obține astfel sistemul de coordonate $O_r x''' y''' z'''$, figura 9, în raport cu care punctul $M_{k\beta}$ are coordonatele:

$$\begin{bmatrix} x'''_{k\beta}(\alpha) \\ y'''_{k\beta}(\alpha) \\ z'''_{k\beta}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) & 0 \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x''_{k\beta}(\alpha) \\ y''_{k\beta}(\alpha) \\ z''_{k\beta}(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot r \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) \\ k \cdot r \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta - \cos\alpha \cdot \sin\beta) \\ -k \cdot r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \end{bmatrix}. \quad (12)$$



In order to obtain the parallelism between the axes of the secondary system and of the main system Oxyz, the system of coordinates $O_r x'' y'' z''$ rotates round the axis $O_r z''$ with the angle $-\alpha$. The system of coordinates $O_r x''' y''' z'''$ is thereby obtained, figure 9, in relation to whom, the point $M_{k\beta}$ has the coordinates:

Figura 9. Sistemul de coordonate $O_r x''' y''' z'''$ în raport cu sistemul principal Oxyz
Figure 9. System of coordinates $O_r x''' y''' z'''$ in relation to the main system Oxyz

În sistemul de coordonate principal Oxyz, coordonatele punctului generator $M_{k\beta}(x_{k\beta}; y_{k\beta}; z_{k\beta})$ se obțin ca sumă a coordonatelor punctului $O_r(x_{O_r}; y_{O_r}; z_{O_r})$, scrise în sistemul de coordonate Oxyz, și ale punctului $M_{k\beta}(x'''_{k\beta}; y'''_{k\beta}; z'''_{k\beta})$ scrise în sistemul de coordonate $O_r x''' y''' z'''$:

$$\begin{cases} x_{k\beta}(\alpha) = x_{O_r} + x'''_{k\beta}(\alpha) = b \cdot \sin\theta \cdot \cos\alpha + k \cdot r \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) \\ y_{k\beta}(\alpha) = y_{O_r} + y'''_{k\beta}(\alpha) = b \cdot \sin\theta \cdot \sin\alpha + k \cdot r \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\theta - \cos\alpha \cdot \sin\beta) \\ z_{k\beta}(\alpha) = z_{O_r} + z'''_{k\beta}(\alpha) = b \cdot \cos\theta - k \cdot r \cdot \cos\beta \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (13)$$

acestea formând în fapt ecuațiile parametrice generale ale cicloidei sferice, scrise în sistemul de coordonate Oxyz (cu originea în centrul sferei S și cu planul xOy suprapus peste planul ecuatorial Π_E).

Scrise în sistemul de coordonate $O_R x_1 y_1 z_1$ (cu originea în centrul O_R al cercului fix (de bază), cu planul $x_1 O_R y_1$ cuprins în planul Π_R al cercului de bază și a cărui axă $O_R x_1$ să conțină punctul M_0 inițial de tangență dintre cercurile Γ_R și Γ_r) ecuațiile parametrice ale cicloidei sferice sunt:

In the main system of coordinates Oxyz, the coordinates of the generating point $M_{k\beta}(x_{k\beta}; y_{k\beta}; z_{k\beta})$ are obtained as sum of the coordinates of the point $O_r(x_{O_r}; y_{O_r}; z_{O_r})$, written in the system of coordinates Oxyz, and of the point $M_{k\beta}(x'''_{k\beta}; y'''_{k\beta}; z'''_{k\beta})$ written in the system of coordinates $O_r x''' y''' z'''$:

these ones forming in fact the general parametric equations of the spherical cycloid, written in the system of coordinates Oxyz (O is the centre of the sphere S; the plane xOy overlapping the equatorial plane Π_E).

Written in the system of coordinates $O_R x_1 y_1 z_1$ (with the origin in the centre O_R of the fixed (base) circle, with the plane $x_1 O_R y_1$ in the plane Π_R of the base circle and its axis $O_R x_1$ containing the initial tangency point M_0 between the circles Γ_R and Γ_r) the parametric equations of the spherical cycloid are:

$$\begin{cases} x_{k\beta}(\alpha) = b \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha + k \cdot r \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) \\ y_{k\beta}(\alpha) = b \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha + k \cdot r \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) \\ z_{k\beta}(\alpha) = a + b \cdot \cos \theta - k \cdot r \cdot \cos \beta \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (14)$$

În literatura de specialitate [6] pentru cicloidele sferice se dau relațiile parametrice (scrise într-un sistem de coordonate cu centrul în centrul cercului fix și cu planul xOy suprapus peste planul acestui cerc, identic cu sistemul $O_{R X_1 Y_1 Z_1}$):

$$\begin{cases} x = (a - b \cdot \cos \omega + d \cdot \cos \omega \cdot \cos qt) \cdot \cos t + d \cdot \sin t \cdot \sin qt \\ y = (a - b \cdot \cos \omega + d \cdot \cos \omega \cdot \cos qt) \cdot \sin t - d \cdot \cos t \cdot \sin qt \\ z = \sin \omega \cdot (b - d \cdot \cos qt) \end{cases} \quad (15)$$

unde a este raza cercului fix, b este raza cercului mobil, q este raportul dintre raza cercului fix și raza cercului mobil, d este distanța de la punctul generator de traiectorie la centrul cercului mobil, ω este unghiul dintre planul cercului fix și planul cercului mobil, iar t este variabila independentă.

Este ușor de arătat că

$$R - r \cdot \cos \theta = b \cdot \sin \theta; \quad (16)$$

$$r \cdot \sin \theta = a + b \cdot \cos \theta, \quad (17)$$

și ca urmare relațiile (14) și (15) sunt complet conforme (evident !!), corespondența dintre notații fiind $a \equiv R$, $b \equiv r$, $q \equiv u$, $\omega \equiv \theta$, $d \equiv d = k \cdot r$, $t \equiv \alpha$.

4. Automate de presare (hipo)cicloidale sferice

Aplicația tehnică vizată în mod explicit de lucrarea de față este construcția și funcționarea automatelor (hipo)cicloidale sferice, mașini-unelte caracterizate de prezența în structura lanțului cinematic principal a unui mecanism planetar cu roți dințate conice ca mecanism de transformare a mișcării de rotație a unui arbore principal în mișcare de translație rectilinie-alternativă cu autoîntoarcere, temporară, a (unuia sau) mai multor culisoare, organe de lucru executoare ale mașinii.

Prezența mecanismului planetar cu roți dințate conice conduce implicit la valori raționale pentru raportul u ($u = z_R/z_r$), iar cerințe de natură tehnologică impun pentru distanțele a și b condițiile $a \geq 0$, $b \geq 0$, ceea ce este echivalent cu practica uzuală de a utiliza roți dințate conice „cu dantură exterioară” sau, la limită, roți dințate conice „plane”, cu unghi la vârf de 180° al conului de divizare. Evident, nu se acceptă ca simultan $a = 0$ și $b = 0$.

La un automat (hipo)cicloidal spațial sferic amplasarea culisoarelor se face astfel încât acestea

In the literature [6] the parametric relations (written in a system of coordinates centred in the fixed circle and with the plane xOy overlapping the plane of this circle, identical with the system $O_{R X_1 Y_1 Z_1}$) are given for spherical cycloids:

where a is the radius of the fixed circle, b is the radius of the mobile circle, q is the ratio between the fixed-circle radius and the mobile-circle radius, d is the distance from the trajectory-generating point to the mobile-circle centre, ω is the angle between the fixed-circle plane and the mobile-circle plane and t is the independent variable.

It is easy to show that

hence the relations (14) and (15) are fully compliant (of course !!), the correspondence between the notations being $a \equiv R$, $b \equiv r$, $q \equiv u$, $\omega \equiv \theta$, $d \equiv d = k \cdot r$, $t \equiv \alpha$.

4. Spherical (hypo)cycloidal forming automatic machines

The technical application explicitly aimed by the paper herein is the construction and operation of the spherical (hypo)cycloidal automaton, machine-tools characterized by the presence in the structure of the main kinematic chain of a planetary gear with conical wheels as mechanism for transforming the rotation motion of a main shaft in rectilinear-alternative translation motion with temporary self-return of (one or) several slide-blocks, executing working elements of the machine.

The presence of the planetary gear with conical wheels implicitly leads to rational values for the ratio u ($u = z_R/z_r$), and the technological-nature requirements impose for the distances a and b the conditions $a \geq 0$, $b \geq 0$, which equates the usual practice of using conical wheels “with external gearing” or, to the limit, “plane” conical wheels, with pitch-cone apical angle of 180° . Obviously, $a = 0$ and $b = 0$ are not simultaneously accepted.

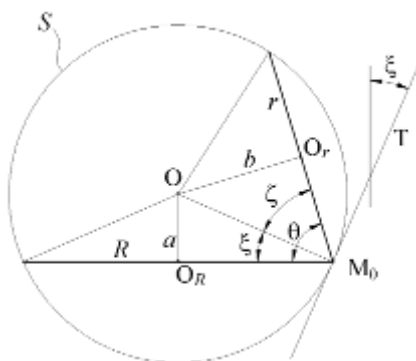
In a spatial spherical (hypo)cycloidal automatic machine, the slide-blocks are placed so as to

să translateze după direcții care:

1. – conțin punctele de contact cu cercul fix Γ_R ale traiectoriilor descrise de punctele M generatoare de traiectorie, și
2. – se suprapun peste tangentele la traiectorie în punctele respective, care sunt puncte de întoarcere.

Aceste direcții de translație ale culisoarelor se impun pentru a obține, cel puțin pentru cursa sub sarcină a culisoarelor, distanță minimă în plan perpendicular pe direcția de translația a oricărui culisor, între poziția curentă a punctului generator de traiectorie și direcția de translație a respectiv. Această cerință se îndeplinește dacă punctul generator de traiectorie descrie o (hipo)cicloidă sferică normală, eventual ușor alungită.

Tangenta T la o (hipo)cicloidă sferică normală este, evident, tangentă la sfera S. Ca urmare, axele culisoarelor sunt tangente la sferă în punctele de întoarcere ale (hipo)cicloidelor normale (punctul M_0 și echivalentele acestuia) și fac cu direcția Oz a sistemului de coordonate un unghi ξ , figura 10.



translate after directions which:

1. – contain the contact points with the fixed circle Γ_R of the trajectories described by the trajectory-generating points M, and
2. – overlap the tangents to the trajectory in the respective points, which are reversal points.

These translation directions of the slide-blocks are called for obtaining, at least for their course under load, the minimal distance in the perpendicular plane on the translation direction of any slide-block, between the current position of the trajectory-generating point and its translation direction. This requirement is fulfilled if the trajectory-generating point describes a normal, even slightly elongated spherical (hypo)cycloid.

The tangent T to a normal spherical (hypo)cycloid is obviously tangent to the sphere S. Therefore, the slide-block axes are tangent to the sphere in the reversal points of the normal (hypo)cycloids (point M_0 and its equivalents) and form with the direction Oz of the system of coordinates, an angle ξ , figure 10.

Figura 10. Tangenta în M_0 și înclinarea acesteia față de axa Oz

Figure 10. Tangent in M_0 and its inclination against the axis Oz

Legile de mișcare ale tuturor culisoarelor unui automat (hipo)cicloidal sferic sunt identice. Considerând culisorul din punctul M_0 , aflat în planul $x_1O_Rz_1$, legea lui de mișcare, corespunzătoare unei curse totale $H = s_{\max}(\alpha_H) > h_N = s(\alpha_N)$ este dată doar de componenta $z(\alpha)$ a ecuațiilor parametriche ale (hipo)cicloidei sferice:

$$s_{\xi}(\alpha) = \frac{1}{\cos \xi} \cdot z_{k\beta}(\alpha) = \frac{a + b \cdot \cos \theta - k \cdot r \cdot \cos(u \cdot \beta) \cdot \sin \theta}{\cos \xi}, \quad |\alpha| \leq \alpha_H. \quad (18)$$

5. Cazuri particulare de cicloide sferice, utilizabile la automate de presare

Automatele de presare hipocicloidale plane utilizează un mecanism planetar cu roți dințate cilindrice, cu angrenare interioară, cu un singur satelit sau mai mulți. Culisoarele sunt amplasate în sens radial față de roata dințată centrală fixă și translatează pe direcția tangentei la hipocicloida plană dusă prin fiecare dintre punctele de întoarcere

5. Special cases of spherical cycloids, used in forming automatic machines

Plane hypocycloidal automatic machines resort to a planetary gear with cylindrical toothed wheels, with inner gear, with one or several satellites. The slide-blocks are radially placed against the fixed central toothed wheel and translates on the direction of the tangent to the plane hypocycloid drawn through every reversal point of the curve described

ale curbei descrisă de fiecare punct generator.

Automatele (hipo)cicloidale spațiale sferice utilizează, de asemenea, un mecanism planetar cu roți dințate, dar cu dantură conică, cu unul sau mai mulți sateliți. Roata centrală fixă și sateliții pot fi, la limită, cel mult roți plane, deci unghiul conului de divizare al danturilor acestora poate avea cel mult 180° . Ca și în cazul automatelor hipocicloidale plane, la un automat (hipo)cicloidal spațial culisoarele sunt ghidate în batiu și translatează pe direcția tangențelor la cicloida normală duse prin punctele de întoarcere ale acesteia, tangente și la sfera S.

Fiind automat de presare, productivitatea (exprimată prin număr de presări în unitatea de timp) este o caracteristică esențială a mașinii. La automatele (hipo)cicloidale, productivitatea depinde de numărul de sateliți ai mecanismului planetar, de numărul de puncte generatoare solidare cu fiecare satelit și de turația arborelui central al mecanismului planetar.

Turația arborelui principal se stabilește în funcție de unele mărimi tehnologice, așa cum sunt h_N , lungimea nominală a cursei sub sarcină, și v_N , viteza nominală de început de presare. Ca urmare, creșterea de productivitate nu se poate face pe seama creșterii turației arborelui central fără a afecta parametri optimi ai procesului de prelucrare.

Un automat (hipo)cicloidal are o productivitate crescută doar dacă are mai mulți sateliți, cu fiecare satelit sunt solidare mai multe puncte generatoare de traiectorie și dacă (de preferat în anumite condiții) puncte generatoare de pe diferiții sateliți descriu aceleași traiectorii, deci acționează asupra aceluiași culisore. Primele două cerințe converg către număr crescut de culisoare, iar cea de-a treia asigură acționarea cu frecvență crescută a fiecărui culisor. În fapt, productivitatea unui automat (hipo)cicloidal este dată de produsul dintre numărul de culisoare (numărul de posturi de presare) și numărul de acționări ale fiecărui culisor într-o unitate de timp.

Numărul maxim de culisoare posibil de amplasat la un automat de presare (hipo)cicloidal sferic este dependent de gabaritul acestora, de orientarea lor față de planul Π_R și de gabaritul roții centrale fixe, deci de raza R . Contează mult și dacă amplasarea culisorelor se face la interiorul sau la exteriorul roții centrale fixe [4], figura 11.

Construcția și gabaritul unui culisor este, în esență, invariant față de numărul de sateliți ai mecanismului planetar și de tipul cicloidei descrisă de punctele generatoare.

Orientarea culisorelor este intim legată de tipul cicloidei, esențială fiind distanța a de la centrul

by every generating point.

Spatial spherical (hypo)cycloidal automatic machines also resort to a planetary gear with toothed wheels, but with bevel-gear-tooth system, with one or several satellites. The fixed central wheel and the satellites may be, to the limit, at most plane wheels; hence the pitch-cone angle may have at most 180° . As in the case of the plane hypocycloidal automatic machines, in a spatial (hypo)cycloidal automatic machine, the slide-blocks are guided in the frame and translate on the direction of the tangents to the normal cycloid drawn through its reversal points, also tangent to the sphere S.

Being a forming automatic machine, the productivity (expressed through forming number in the time unit) is an essential characteristic of the machine. As regards (hypo)cycloidal automaton, the productivity depends on the number of satellites of the planetary gear, on the number of generating points solidary with every satellite and on the spindle speed of the planetary gear.

The spindle speed is set as a function of certain technological values, for instance h_N , the nominal length of the course under load and v_N , the nominal speed of forming beginning. Therefore, the rise in productivity cannot be done on account of the spindle-speed rise without affecting the optimal parameters of the processing.

A (hypo)cycloidal automaton has increased productivity only if possessing several satellites, if more trajectory-generating points are solidary with every satellite and if (preferable in certain circumstances) the generating points on the various satellites describe the same trajectories, therefore acting on the same slide-blocks. The first two requirements converge towards a higher slide-block number and the third ensures the drive of every slide-block with higher frequency. In fact, the productivity of a (hypo)cycloidal automaton is given by the product between the slide-block number (number of forming stations) and the drive-number for every slide-block in a time unit.

The maximal number of slide-blocks in a spherical (hypo)cycloidal forming automatic machine depends on their clearance, on their orientation against the plane Π_R and on the clearance of the fixed central wheel, hence on the radius R . Placing the slide-blocks within or outside the fixed central wheel [4], figure 11, matters a lot.

The construction and clearance of a slide-block is essentially invariant against the satellite number of the planetary gear and on the type of cycloid described by the generating points.

The slide-block orientation is closely related to

sferei S până la planul Π_R al roții dințate centrale fixe, deci de unghiul ξ .

Număr maxim de culisoare posibil de amplasat se obține dacă axele acestora sunt paralele cu axa automatului (identică cu axa arborelui central al mecanismului planetar, arbore principal al mașinii), figura 12, ceea ce se obține dacă $a = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$. În acest caz cercul Γ_R este chiar un ecuator al sferei S , $\Gamma_R \equiv \Gamma_E$, iar unghiul θ este întotdeauna unul ascuțit, $0 < \theta < 90^\circ$, deci traiectoriile descrise de punctele generatoare sunt doar hipocicloide sferice. Ca urmare, în aceste condiții se poate vorbi de „*automate de presare hipocicloidală sferică ecuatorială*”.

the cycloid type, the distance a from the sphere S -centre to the plane Π_R of the fixed central toothed wheel being essential, therefore from the angle ξ .

The maximum possible number of slide-blocks is obtained if their axes parallel that of the automaton (identical with the axis of the central shaft of the planetary gear, main shaft of the machine), figure 12, which is obtained if $a = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$. In this case, the circle Γ_R is an equator of the sphere S , $\Gamma_R \equiv \Gamma_E$, and the angle θ is always sharp, $0 < \theta < 90^\circ$, hence the trajectories described by the generating points are only spherical hypocycloids. Consequently, in these conditions, one may speak of “*equatorial spherical hypocycloidal automatic machines for cold forming*”.

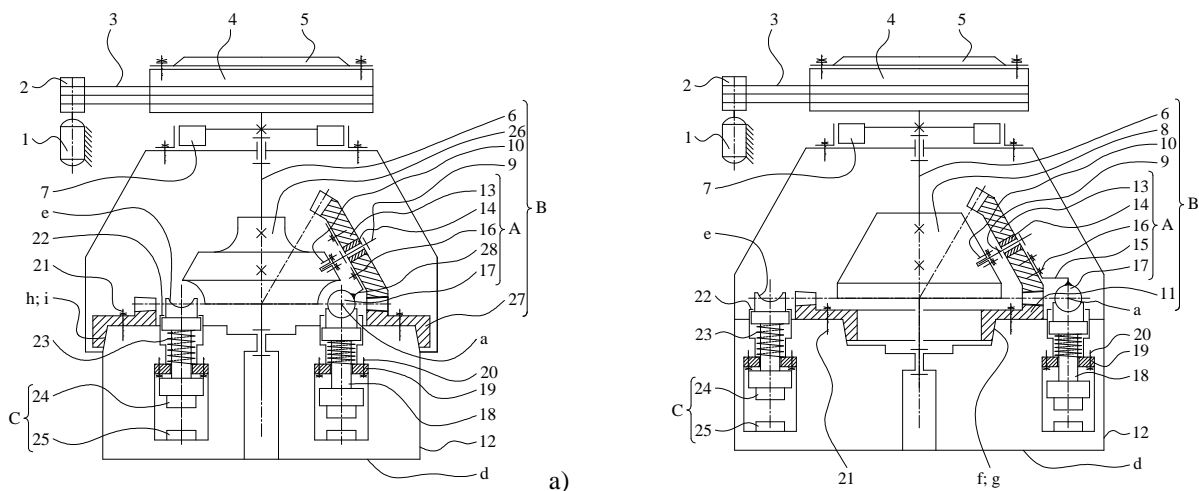


Figura 11. Automate de presare hipocicloidală sferică ecuatorială (scheme cinematice) [4]. Culisoarele (paralele cu axa arborelui principal al mașinii) sunt amplasate: a) la interiorul roții centrale fixe; b) la exteriorul acesteia
 Figure 11. Equatorial spherical hypocycloidal forming automatic machines (kinematic schemes) [4]. The slide-blocks (parallel to the main shaft axis of the machine) are placed: a) within the fixed central wheel; b) outside it

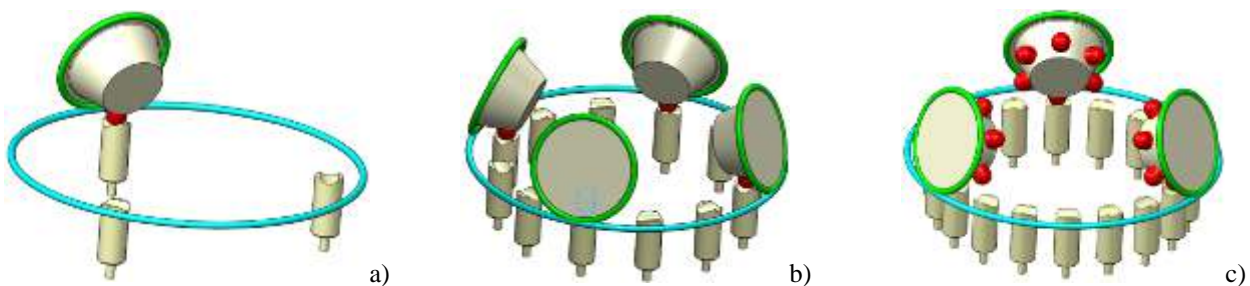


Figura 12. Scheme simplificate de automate de presare hipocicloidală sferică ecuatorială:
 a) cu un singur satelit și un singur punct generator; b) cu mai mulți sateliți, fiecare un singur punct generator;
 c) cu număr maxim de culisoare
 Figure 12. Simplified schemes of equatorial spherical hypocycloidal forming automatic machines:
 a) with one satellite and with one generating point; b) with more satellites, each with one generating point;
 c) with maximum number of slide-blocks

În condițiile unei forțe nominale F_N impuse, roata conică centrală fixă are gabarit maxim dacă este una „plană”, cu unghi la vârf al conului de divizare $\psi = 180^\circ$, caz pentru care se obține implicit $a = 0$, deci corespunde tot cazului automatelor

In the conditions of an imposed nominal force F_N , the fixed central mitre wheel has maximum clearance if it is “plane”, with the pitch-cone apical angle $\psi = 180^\circ$, in which case $a = 0$ is implicitly obtained, hence corresponding to the case of the

hipocicloidale sferice ecuatoriale.

Ambele concluzii anterioare justifică orientarea studiului cu prioritate către hipocicloide sferice ecuatoriale și aplicații ale lor la construcția automatelor de presare hipocicloidale sferice.

Pentru o aceeași sferă S , hipocicloidele sferice ecuatoriale normale diferă între ele prin raportul u dintre raza R a cercului fix și raza r a cercului rulant, implicit egal cu raport cinematic interior al mecanismului planetar pe care respectivele roți îl formează.

În acord cu relația (8), se poate scrie că:

$$u = \frac{R}{r} = \frac{z_R}{z_r} = \frac{i}{j}, \quad (19)$$

unde i și j sunt numere naturale prime între ele, $i > j$.

Se impune a preciza că i semnifică și numărul de bucle ale (hipo)cicloidei, egal cu numărul punctelor de întoarcere ale acesteia, în caz că este una normală. Rezultă că i nu poate fi mai mare decât numărul maxim de culisoare posibil de amplasat la un anumit automat hipocicloidal sferic.

La rândul său, j indică numărul de rotații complete pe care le efectuează arborele principal până la revenirea în poziția inițială a punctului generator, precum și numărul maxim de puncte generatoare solidare cu un același satelit care descriu o aceeași traiectorie.

La automatele hipocicloidale, indiferent dacă sunt plane sau spațiale, antrenarea unui culisor este cu atât mai bună cu cât distanța dintre punctul generator și axa culisorului este mai mică. Evident, această cerință se referă doar la acea parte a traiectoriei punctului generator pe parcursul căreia este antrenat culisorul. La automatele hipocicloidale plane această cerință este îndeplinită dacă $u = 2$, caz în care se obține o hipocicloidă degenerată într-un diametru al cercului fix, „dreapta diametrală”. Pentru hipocicloidele sferice normale un asemenea caz particular ar corespunde unei hipocicloide sferice normale cu două bucle la care cele două ramuri să se suprapună, caz în care, pentru $k = 1$ și $u = 2$, $y_{k\beta}(\alpha) = 0$, vezi relațiile (14), $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$:

$$y(\alpha) = b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta + r \cdot [\sin \alpha \cdot \cos(2\alpha) \cdot \cos \theta - \cos \alpha \cdot \sin(2\alpha)] = 0. \quad (20)$$

Relația anterioară poate fi pusă sub forma

$$2r \cdot \cos^2 \alpha \cdot (\cos \theta - 1) + b \cdot \sin \alpha - r \cdot \cos \theta = 0. \quad (21)$$

Ținând cont și de relația (16), relația de mai sus este adevărată pentru orice $\alpha \in \mathfrak{R}$ dacă sunt îndeplinite simultan condițiile

equatorial spherical hypocycloidal automaton.

Both previous conclusions justify the pre-eminent orientation of the study towards the equatorial spherical hypocycloids and their applications in constructing spherical hypocycloidal automatic machines for cold forming.

For a same sphere S , the normal equatorial spherical hypocycloids differ through the ratio u between the radius R of the fixed circle and the radius r of the rolling circle, implicitly equal to the inner kinematic ratio of the planetary gear formed by the respective wheels.

In accordance to the relation (8), one may write:

where i are j natural prime numbers between themselves $i > j$.

The specification should be made that i is the loop number of the (hypo)cycloid, equal to its reversal-point number, in case it is normal. Hence i cannot be greater than the maximum possible number of slide-blocks to be placed in a certain spherical hypocycloidal automaton.

In its turn, j indicates the number of the complete rotations of the main shaft until the return in the initial position of the generating point, as well as the maximum number of generating points solidary with the same satellite, which describe the same trajectory.

As regards hypocycloidal automaton, whether plane or spatial, the better the drive of a slide-block, the shorter the distance between the generating point and the slide-block axis. Obviously, this requirement refers to that part of the generating-point trajectory along which the slide-block is driven. In plane hypocycloidal automaton, this requirement is fulfilled if $u = 2$, in which case a degenerated hypocycloid in fixed-circle diameter is obtained, the “diametric right”. For normal spherical hypocycloids, such a case corresponds to a two-looped normal spherical hypocycloid, whose two branches overlap, in which case, for $k = 1$ and $u = 2$, $y_{k\beta}(\alpha) = 0$, see relations (14), $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$:

The previous relation may be also written

Considering the relation (16), the afore-described relation is true for any $\alpha \in \mathfrak{R}$ if the conditions are simultaneously fulfilled

$$\begin{cases} \cos\theta - 1 = 0 \\ b \cdot \sin\theta - r \cdot \cos\theta = R - 2r \cdot \cos\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ R = 2r \end{cases} \quad (22)$$

caz care corespunde exclusiv hipocicloidelor plane normale, cu două bucle.

La automatele hipocicloidale sferice ecuatoriale cerința enunțată (pentru $h_N = z(\alpha_N)$, $y(\alpha_N) = \min.$, α_N fiind unghiul nominal) se îndeplinește cu atât mai mult cu cât u are o valoare mai apropiată de $\sqrt{2}$. Ar fi deci de preferat ca $u = 7/4$.

Cercetările privind automatele hipocicloidale sferice ecuatoriale este în derulare. Pentru subclasele corespunzătoare hipocicloidelor sferice cu două bucle [8, 9, 10, 11, 12, 13] și cu trei bucle, figura 13, studiul este practic finalizat.

case which exclusively corresponds to the two-looped normal plane hypocycloids.

For equatorial spherical hypocycloidal automaton, the enunciated requirement (for $h_N = z(\alpha_N)$, $y(\alpha_N) = \min.$, α_N being the nominal angle) is fulfilled, especially since u has closer value to $\sqrt{2}$. Hence it would be preferable that $u = 7/4$.

Researches on equatorial spherical hypocycloidal automatic machines are being conducted. For the sub-classes corresponding to the two-looped hypocycloids [8, 9, 10, 11, 12, 13] and three-looped ones, figure 13, the study is practically ended.

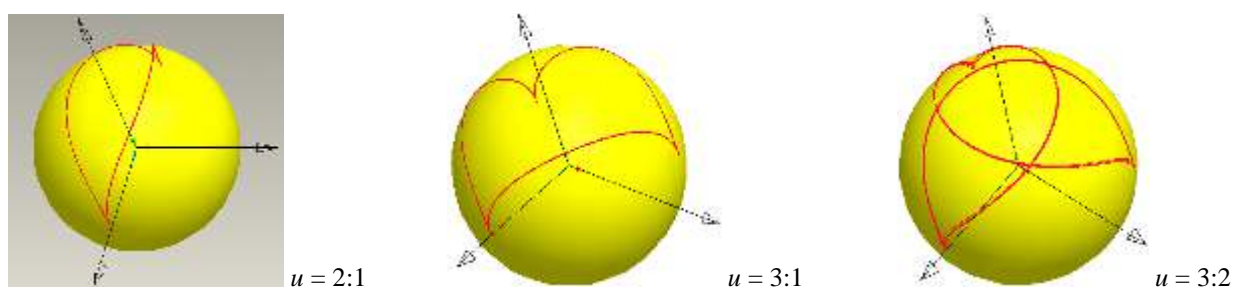


Figura 13. Hipocicloide sferice ecuatoriale normale cu două și cu trei bucle
Figure 13. Normal two-looped and three-looped equatorial spherical hypocycloids

6. Parametri cinematici ai automatelor hipocicloidale sferice ecuatoriale

Ecuatiile parametrice ale unei hipocicloide sferice ecuatoriale se obțin prin particularizarea relațiilor generale (14). Deoarece $a = 0$, rezultă imediat că $R = R_s$, $\theta = \zeta$, $b = r \cdot \sqrt{u^2 - 1}$, $\cos\theta = 1/u$ și $\sin\theta = u/\sqrt{u^2 - 1}$. Înlocuind se obține:

$$\begin{cases} x_e(\alpha) = r \cdot \sqrt{u^2 - 1} \cdot \frac{1}{u} \cdot \sqrt{u^2 - 1} \cdot \cos\alpha + k \cdot r \cdot \left[\cos\alpha \cdot \cos(u \cdot \alpha) \cdot \frac{1}{u} + \sin\alpha \cdot \sin(u \cdot \alpha) \right] = \\ \quad = \frac{r}{u} \cdot \left[(u^2 - 1) \cdot \cos\alpha + k \cdot \cos\alpha \cdot \cos(u \cdot \alpha) + k \cdot u \cdot \sin\alpha \cdot \sin(u \cdot \alpha) \right] \\ y_e(\alpha) = r \cdot \sqrt{u^2 - 1} \cdot \frac{1}{u} \cdot \sqrt{u^2 - 1} \cdot \sin\alpha + k \cdot r \cdot \left[\sin\alpha \cdot \cos(u \cdot \alpha) \cdot \frac{1}{u} - \cos\alpha \cdot \sin(u \cdot \alpha) \right] = \\ \quad = \frac{r}{u} \cdot \left[(u^2 - 1) \cdot \sin\alpha + k \cdot \sin\alpha \cdot \cos(u \cdot \alpha) - k \cdot u \cdot \sin(u \cdot \alpha) \cdot \cos\alpha \right] \\ z_e(\alpha) = \frac{r}{u} \cdot \sqrt{u^2 - 1} \cdot [1 - k \cdot \cos(u \cdot \alpha)] \end{cases} \quad (23)$$

Pentru orice culisor al unui automat hipocicloid sferic ecuatorial expresia de spațiu $s(\alpha)$, cea care permite determinarea poziției curente a culisorului față de poziția sa de „punct mort

6. Kinematic parameters of the equatorial spherical hypocycloidal automaton

The parametric equations of an equatorial spherical hypocycloid are obtained through particularizing the general relations (14). As $a = 0$, it follows immediately that $R = R_s$, $\theta = \zeta$, $b = r \cdot \sqrt{u^2 - 1}$, $\cos\theta = 1/u$ and $\sin\theta = u/\sqrt{u^2 - 1}$. Replacing, one obtains:

For any slide-block of an equatorial spherical hypocycloidal automaton, the space expression $s(\alpha)$, which allows determining the current position of the slide-block against its position of “inner dead

inferior”, este chiar componenta $z_e(\alpha)$ a ecuațiilor parametrice ale hipocicloidei ecuatoriale.

Expresia de spațiu este utilă cel puțin pentru determinarea valorii unghiului nominal α_N , mărimea h_N a cursei nominale sub sarcină fiind impusă:

$$h_N = s(\alpha_N) = \frac{r}{u} \cdot \sqrt{u^2 - 1} \cdot [1 - k \cdot \cos(u \cdot \alpha_N)]. \quad (24)$$

Trebuie precizat că valoarea unghiului nominal este determinantă la dimensionarea organologică a multor repere ale mașinii.

Prin derivarea în raport cu timpul a expresiei de spațiu se obține expresia vitezei de translație a oricărui culisor al automatului:

$$v(\alpha) = \frac{d}{dt} s(\alpha) = \omega \cdot k \cdot r \cdot \sqrt{u^2 - 1} \cdot \sin(u \cdot \alpha). \quad (25)$$

Fiind impusă viteza optimă de început de presare, viteză nominală sub sarcină, $v_N = v(\alpha_N)$, rezultă viteza unghiulară optimă necesară a arborelui principal al mașinii, și implicit turația optimă n_{AP} a acestuia, exprimată în min^{-1} :

$$v_N = v(\alpha_N) = \omega \cdot k \cdot r \cdot \sqrt{u^2 - 1} \cdot \sin(u \cdot \alpha_N) \Rightarrow \omega = \frac{v_N}{k \cdot r \cdot \sqrt{u^2 - 1} \cdot \sin(u \cdot \alpha_N)} = \frac{\pi \cdot n_{AP}}{30}. \quad (26)$$

Expresia accelerației culisorului,

$$a(\alpha) = \frac{d}{dt} v(\alpha) = \omega^2 \cdot u \cdot k \cdot r \cdot \sqrt{u^2 - 1} \cdot \cos(u \cdot \alpha), \quad (27)$$

permite determinarea valorii accelerației „nominale”, mărime utilă în cadrul unor calcule de natură dinamică, așa cum sunt, de exemplu, cele pentru dimensionarea cuplei (temporare) de legătură dintre culisor și reperul ce materializează punctul generator de traiectorie.

La Universitatea Transilvania din Brașov, România, sunt în derulare, în cadrul unei teze de doctorat, cercetări aprofundate privind cinematica, construcția și funcționarea unor automate hipocicloidale sferice ecuatoriale. Având în vedere marea diversitate posibil de realizat a acestor mașini, au fost abordate predilect automatele ecuatoriale cu raport $u = 2$ [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Parte dintre soluțiile constructive identificate ca fiind posibile și performante fac deja obiectul a două cereri de brevet de invenție [4, 5].

7. Concluzii

Automatele hipocicloidale plane este un concept românesc original elaborat și dezvoltat la Universitatea Transilvania din Brașov.

Cercetări din ultimii ani au ca obiectiv extinderea conceptului către un nou subgrup, foarte divers, acela de automate hipocicloidale spațiale

centre”, is the very component $z_e(\alpha)$ of the parametric equations of the equatorial hypocycloid.

The space expression is useful at least for determining the nominal-angle value α_N , the value h_N of the nominal course under load being imposed:

One must specify that the nominal-angle value is determined by organically sizing many fixed points of the machine.

Through deriving the space expression in relation with time, the expression of the translation speed for any automaton slide-block is obtained:

The optimal speed of forming beginning being imposed, the nominal speed under load, $v_N = v(\alpha_N)$, the necessary optimal angular speed of the machine main shaft ensues, and implicitly its optimum rotative speed n_{AP} , expressed in min^{-1} :

The expression of the slide-block acceleration,

allows determining the “nominal”-acceleration value, useful for dynamical-nature calculations such as, for instance, those for sizing the connecting (temporary) coupling between the slide-block and the fixed point which materializes the trajectory-generating point.

At *Transilvania* University of Brașov, Romania, within a doctoral thesis, in-depth researches have been conducted on the kinematics, construction and operation of equatorial spherical hypocycloidal automatic machines. Considering the wide range of possibilities for these machines, the equatorial automata with the ratio $u = 2$ [8, 9, 10, 11, 12, 13] were pre-eminently approached. Part of the constructive solutions identified as possible and highly performing have been already making the object of two applications [4, 5].

7. Conclusions

Plane hypocycloidal automatic machines are an original Romanian concept, elaborated and developed at *Transilvania* University of Brașov.

Recent researches have been focused on extending the concept towards a new variegated sub-group, the one of spatial spherical

sferice. În lanțul cinematic principal al acestor mașini este inclus un mecanism planetar cu roți dințate conice generator de traiectorii (hipo)cicloidale spațiale sferice, ca mecanism de transformare a mișcării de rotație a arborelui principal în mișcări de translație rectilinie-alternativă, cu autoîntoarcere, periodică și temporară, a culisoarelor.

Amplasarea optimă a oricărui culisor al automatului se face astfel încât axa acestuia să fie tangentă la (hipo)cicloida normală descrisă de punctul generator de traiectorie. Axele culisoarelor sunt în mod implicit tangente la sfera ce conține cercurile fix și rulant.

La dimensionarea unui automat (hipo)cicloidal este esențială cunoașterea legii de mișcare a culisoarelor, aceeași pentru toate culisoarele. Fiind cunoscută ecuația (hipo)cicloidei descrisă de punctul generator, scrisă sub formă parametrică, legea de mișcare rezultă în mod direct din aceasta și este proporțională cu componenta paralelă cu axa arborelui principal.

Un automat (hipo)cicloidal este optim construit dacă roata centrală fixă este una plană, cu unghi la vârf al conului de divizare de 180° . Cazul corespunde exclusiv automatelor hipocicloidale sferice ecuatoriale. Sunt în derulare cercetări aprofundate privind cinematica, construcția și funcționarea unor astfel de mașini. Au fost abordate predilect automatele ecuatoriale cu raport $u = 2$. Parte dintre soluțiile constructive identificate ca fiind posibile și performante fac deja obiectul a două cereri de brevet de invenție.

hypocycloidal automaton. In the main kinematic chain of these machines, a planetary gear with conical wheels is included, generating spatial spherical (hypo)cycloidal trajectories, as mechanism for transforming the rotating motion of the main shaft in rectilinear-alternative translation motions, with periodical and temporary self-return of the slide-blocks.

Optimally placing any slide-block of the automaton is done so as its axis should be tangent to the normal (hypo)cycloid described by the trajectory-generating point. The back-slide axes are implicitly tangent to the sphere containing the fixed and rolling circles.

Sizing a (hypo)cycloidal automatic machine requires knowing the law of the motion of the slide-blocks, the same for all of them. Knowing the equation of the (hypo)cycloid described by the generating point, parametrically written, the law of motion is its direct result and is proportional with the component parallel to the main shaft axis.

A (hypo)cycloidal automaton is optimally constructed if the fixed central wheel is plane, with pitch-cone apical angle of 180° . The case exclusively corresponds to equatorial spherical hypocycloidal automatic machines. In-depth researches are conducted on the kinematics, construction and operation of such machines. Equatorial automaton with the ratio $u = 2$ were pre-eminently approached. Part of the constructive solutions identified as possible and highly performing already make the object of the two patent applications.

References

1. Cioară, R. (1996) *Automat de presare la rece (Automatic Machine for Cold Forming)*. RO patent no. 109825
2. Cioară, R. (2005) *Automat pentru presare la rece (Automatic Machine for Cold Forming)*. RO patent no. 116360
3. Cioară, R. (2003) *Diametral Hypocycloidal Automatic Machine Tools for Cold Forming. A Synthesis of Types and Constructive Variants*. 3rd International Conference "Research and Development in Mechanical Industry" RaDMI 2003, 19-23 September 2003, Herceg Novia, Serbia and Montenegro, p. 132-135, ISBN-86-83803-06-6
4. Cioară, R., Răceu, R. (2010) *Automat de presare, hipocicloidal sferic, ecuatorial (Automatic Machine for Cold Forming, spherical hypocycloidal, equatorial)*. RO Patent application A/01397/ 23.12.2010
5. Răceu, R., Cioară, R. (2011) *Automat de presare, hipocicloidal sferic, ecuatorial (Automatic Machine for Cold Forming, spherical hypocycloidal, equatorial)*. RO Patent application A/00328/ 8.04.2011
6. www.mathcurve.com/courbes3d/cycloidspheric/trochoidspheric.shtml; Accessed: 11/01/2012
7. Murgulescu, Elena, et al.: *Analytic and differential geometry (Geometrie analitică și diferențială)*. Didactic and Pedagogic Publishing House, Bucharest, 1970 (in Romanian)
8. Răceu, R. (2010) *Constructive particularities of an equatorial spherical hypocycloid automatic machine*. **RECENT**, vol. 11, no. 2(29), p. 125-131, ISSN 1582-0246, Brașov, Romania
9. Răceu, R. (2011) *About new types of equatorial spherical hypocycloid automatic machine*. The 15th International Conference ModTech Modern Technologies, Quality and Innovation, Vadul lui Vodă-Chișinău, Republic of Moldova, 25-27 May 2011, ISSN 2066-6736, vol. II, p. 905-908, ModTech Publishing House, Iași, Romania
10. Răceu, R., Pöllner, C. (2011) *A virtual environment modeling of the operation of an equatorial spatial spherical hypocycloid automatic machine*. The 15th International Conference ModTech Modern Technologies, Quality and Innovation, Vadul lui Vodă-Chișinău, Republic of Moldova, 25-27 May 2011, ISSN 2066-6736, vol. II, p. 909-912, ModTech Publishing House, Iași, Romania
11. Răceu, R. (2011) *New types of equatorial spherical hypocycloid automatic machine*. The 9-th International Conference on Challenges in Higher Education and Research in the 21-st Century, 5-8 June 2011, Sozopol, Bulgaria

12. Răceu, R. (2011) *Other types of equatorial spherical hypocycloid automatic machine*. **RECENT**, vol. 12, no. 2(32), p. 153-160, ISSN 1582-0246, Braşov, Romania
13. Răceu, R., Pöllner, C. (2011) *A new subclass of equatorial spherical hypocycloid automatic machine*. The 9-th International Conference on Challenges in Higher Education and Research in the 21-st Century, 5-8 June 2011, Sozopol, Bulgaria

Lucrare primită în ianuarie 2012

Received in January 2012