

THE MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTER SIMULATION OF CASTING SOLIDIFICATION

MODELAREA MATEMATICĂ ȘI SIMULAREA PE CALCULATOR A SOLIDIFICĂRII PIESELOR TURNATE

Vlad MONESCU, Ioan CIOBANU, Sorin Ion MUNTEANU,
Virgil GEAMĂN, Aurel CRIȘAN
Transilvania University of Brașov, Romania

Abstract. The Department of Materials Science from Transilvania University, Faculty of Materials Science & Engineering developed some mathematical models and software for the computer simulation of casting solidification. The paper presents a mathematical model for computer simulation of eutectic alloys. The mathematical model uses the finite differences method. The mathematical model has the peculiarity that the thermic balance equation of the volume in which the cast piece is divided, is explained in nine cases. The cases are set depending on the initial and final temperature of the elements for a period of time. The mathematical models used by other software gives only a systematization of calculations depending on the initial temperature of the volume elements. In the end of the paper, data is presented regarding the structure of the software and the results (of the solidification of castings) that it provides.

Key words: casting, solidification, mathematical modeling, solidification simulation

1. Introduction

The solidification of the casting from metal alloys has a great influence over their quality. The most frequent defects determined by the solidification of the cast parts are the shrink holes. These represent funnels caused by the alloy contraction when they solidify. The technological measures to eliminate these defects are based on the knowledge of the evolution of the temperature field in the casting unit – the form it takes while cooling and solidifying. Firstly, the position of the hot spots is to be known, together with the movement of the solidification front and the evolution of the liquid alloy quantity existent in the feeder. The most advantageous method to study the solidification of the cast parts in order to eliminate the shrink holes is to simulate the solidification with the help of the computer [4, 5].

2. Aim of paper

The Department of Materials Science from Transilvania University, Faculty of Materials Science & Engineering developed some mathematical models and software for the computer simulation of casting solidification [1, 2, 3]. These

Rezumat. La departamentul Știința Materialelor de la Universitatea Transilvania din Brașov au fost realizate mai multe modele matematice și softuri pentru simularea solidificării pieselor turnate. În lucrare este prezentat modelul matematic pentru simularea solidificării pieselor turnate din aliaje eutectice. Modelul matematic utilizează metoda diferențelor finite. Modelul matematic are particularitatea că ecuația de bilanț termic a elementelor de volum în care este divizată piesa turnată este explicată în nouă cazuri. Acestea sunt stabilite în funcție de temperatura inițială și de temperatura finală a elementelor pentru un interval de timp. Modelele matematice utilizate de alte softuri sistematizează calculul numai în funcție temperatura inițială a elementelor de volum. În final sunt prezentate date privind structura softului și rezultate (despre solidificarea pieselor turnate) pe care acesta le furnizează.

Cuvinte cheie: turnare, solidificarea pieselor turnate, modelare matematică, simularea solidificării

1. Introducere

Solidificarea pieselor turnate din aliaje metalice are o mare influență asupra calității acestora. Defectele cele mai frecvente determinate de solidificarea pieselor turnate sunt retasurile. Acestea sunt goluri cauzate de contracția aliajelor la solidificare. Măsurile tehnologice pentru eliminarea acestor defecte din piesele turnate se bazează pe cunoașterea evoluției câmpului de temperatură din ansamblul piesă turnată – formă în timpul răcirii și solidificării aliajului. Este necesar să se cunoască în primul rând poziția nodurilor termice, deplasarea frontului de solidificare și evoluția cantității de aliaj lichid din maselotă. Cea mai avantajoasă metodă pentru studiul solidificării pieselor turnate în vederea eliminării retasurilor o constituie simularea solidificării cu ajutorul calculatorului [4, 5].

1. Scopul lucrării

La departamentul Știința Materialelor de la Universitatea Transilvania din Brașov au fost realizate mai multe modele matematice și softuri pentru simularea solidificării pieselor turnate din aliaje metalice [1, 2, 3]. Acestea se referă la

refer to the solidification of the cast parts from eutectic, hypoeutectic and solid solution type alloys. The paper presents the mathematical model for the simulation of the solidification of the cast parts from eutectic alloys. Also, data is presented about the structure of the soft and the results it supplies.

3. Hypotheses of the mathematical model

The mathematical model uses the finite differences method. The casting – shape unit/assembly is divided into cubic elements with the side Δ . The position of an element in the cast – shape unit is marked with three numerical coordinates called “ i, j, k ”. These represent the serial number of the elements in the three orthogonal axis Ox, Oy and Oz. Figure 1 shows the shape division principle and the element marking with indices.

solidificarea pieselor turnate din aliaje eutectice, din aliaje hipoeutectice și din aliaje de tip soluție solidă. În lucrare este prezentat modelul matematic pentru simularea solidificării pieselor turnate din aliaje eutectice. Sunt prezentate date despre structura softului și rezultate pe care acesta le furnizează.

3. Ipotezele modelului matematic

Modelul matematic utilizează metoda diferențelor finite. Ansamblul piesă turnată – formă este divizat în elemente cubice cu latura Δ . Poziția unui element în ansamblul piesă – formă este notată prin trei coordonate numerice “ i, j, k ”. Acestea reprezintă numărul de ordine al elementelor pe cele trei axe ortogonale Ox, Oy și Oz. În figura 1 este arătat principiul divizării formelor și notarea prin indici a elementelor.

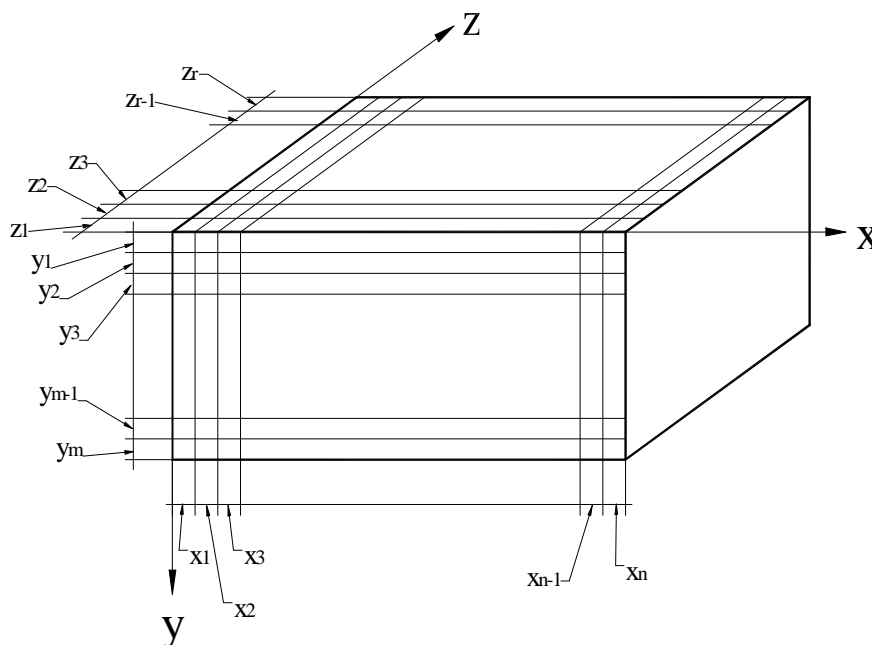


Figure 1. Mould assembly divided in cubic finite elements
 Figura 1. Divizarea ansamblului formei în elemente finite cubice

The total time of the simulation process is divided into “ τ ” time intervals. Any moment on the “ τ_q ” process is expressed by the relation $\tau_q = q \cdot \tau$, where q represents the time numerical coordinate. This has integral values between $q = 0$ and $q = q_{max}$.

The mathematical model considers the following hypotheses:

- the contact between the elements is perfect during the entire process;
- the heat transmission inside the mould is made only by means of conductivity in perpendicular direction on the surfaces of the elements;

Timpul total al procesului de simulare este divizat în intervale de timp “ τ ”. Un moment oarecare de pe parcursul procesului “ τ_q ” este $\tau_q = q \cdot \tau$, unde q reprezintă coordonata numerică de timp. Aceasta are valori întregi cuprinse între $q = 0$ și $q = q_{max}$.

La elaborarea modelului matematic s-au considerat următoarele ipoteze:

- contactul între elementele divizate este perfect pe toată durata procesului;
- transmisia de căldură în interiorul formei are loc numai prin conductibilitate perpendicular pe suprafața elementelor discretizate;

- the heat exchange between mould-environment is done by convection coefficient;
- the variation of the volume with the temperature is neglected, as well as the volume variation at solidification (as a result, the density is considered constant with temperature);
- are take into consideration the variation of the specific heat and of the thermal conductivity as a function of the temperature, changing the liquid-solid state;
- the alloy solidifies at constant temperature, hypothesis valid for the pure metals and eutectic alloys;
- the flowing and feeding processes during solidification are ignored.

4. Notations

The physical characteristics of an element whose shape is divided are marked with clues “ i, j, k ” - for space and “ q ” - for time. To express the parameters in the mathematical model equations, the following notations are assumed:

- T_{ijk}^q - the temperature of the element with indexes “ i, j, k ”, at the “ q ” moment;
- T_{ijk}^{q+1} - the temperature of the element with indexes “ i, j, k ”, at the “ $q+1$ ” moment;
- $(T_s)_{ijk}$ - the solidification temperature of the “ ijk ” element;
- ξ_{ijk}^q - the fraction of solid of the “ ijk ” element at the “ q ” moment;
- Δ - the length of the elements (the step of mesh);
- $(\rho_s)_{ijk}^q$ - the density in the solid state of the “ ijk ” element at the “ q ” moment;
- $(\rho_L)_{ijk}^q$ - the density in the liquid state of the “ ijk ” element at the “ q ” moment;
- L_{ijk} - the latent heat of the “ ijk ” element;
- $(c_s)_{ijk}^q$ - the specific heat in the solid state of the “ ijk ” element at the “ q ” moment;
- $(c_L)_{ijk}^q$ - the specific heat in the liquid state of the “ ijk ” element at the τ_k moment;
- $(\Delta Q_{ijk}^q)_{tr}$ - the heat changed between the “ ijk ” element and neighbour elements;
- $(\Delta Q_{ijk}^q)_m$ - the mass heat released by the “ ijk ” element as result of temperature modification or changing the state liquid-solid;

- schimbul de căldură între formă și mediul ambiant se ia în considerare printr-un coeficient de convecție;
- se neglijează variația volumului cu temperatura, cât și la solidificare (ca urmare densitatea se consideră constantă cu temperatura);
- se consideră variația căldurii specifice, a conductibilității termice cu temperatura și cu starea de agregare;
- aliajul se solidifică la temperatură constantă (ipoteză valabilă în cazul metalelor pure și aliajelor eutectice);
- se neglijează procesele de curgere și de alimentare în timpul solidificării.

4. Notații

Caracteristicile fizice ale unui element în care este divizată forma sunt notate prin indicii “ i, j, k ” - pentru spațiu și “ q ” - pentru timp. Pentru scrierea ecuațiilor se utilizează următoarele notații:

- T_{ijk}^q - temperatura elementului cu coordonatele “ i, j, k ” la momentul “ q ”;
- T_{ijk}^{q+1} - temperatura elementului “ i, j, k ”, la momentul “ $q+1$ ”;
- $(T_s)_{ijk}$ - temperatura solidus a elementului “ ijk ”;
- ξ_{ijk}^q - fracția de solid la momentul “ q ” în elementul “ ijk ”;
- Δ - latura elementelor (pasul rețelei de divizare);
- $(\rho_s)_{ijk}^q$ - densitatea în stare solidă a elementului “ ijk ” la momentul “ q ”;
- $(\rho_L)_{ijk}^q$ - densitatea în stare lichidă a elementului “ ijk ” la momentul “ q ”;
- L_{ijk} - căldura latentă a elementului “ ijk ”;
- $(c_s)_{ijk}^q$ - căldura specifică în stare solidă a elementului “ ijk ” la momentul “ q ”;
- $(c_L)_{ijk}^q$ - căldura specifică în stare lichidă a elementului “ ijk ” la momentul “ q ”;
- $(\Delta Q_{ijk}^q)_{ced}$ - căldura transmisă între elementul “ ijk ” și elementele vecine;
- $(\Delta Q_{ijk}^q)_m$ - variația conținutului de căldură masică a elementul “ ijk ” ca urmare a modificării temperaturii și/sau a stării de agregare;

- $\alpha s_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the “q” moment, between the “ijk” element and the element located on the left side;
- $\alpha d_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the “q” moment, between the “ijk” element and the element located on the right side;
- $\alpha h_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the “q” moment, between the “ijk” element and the element located up;
- $\alpha j_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the “q” moment, between the “ijk” element and the element located below;
- $\alpha f_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the “q” moment, between the “ijk” element and the neighbour element located before;
- $\alpha t_{i,j,k}^q$ - the heat transfer coefficient at the “q” moment, between the “ijk” element and the neighbour element located behind.
- $\alpha s_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere a căldurii la momentul “q” între elementul “ijk” și elementul vecin situat la stânga lui;
- $\alpha d_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere a căldurii la momentul “q”, între elementul “ijk” și elementul vecin situat la dreapta lui;
- $\alpha h_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere a căldurii la momentul “q”, între elementul “ijk” și elementul vecin situat deasupra lui;
- $\alpha j_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere a căldurii la momentul “q”, între elementul “ijk” și elementul vecin situat sub el;
- $\alpha f_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere al căldurii la momentul “q”, între elementul “ijk” și elementul vecin situat în fața lui;
- $\alpha t_{i,j,k}^q$ - coeficient de transmitere al căldurii la momentul “q”, între elementul “ijk” și elementul vecin situat în spate lui.

5. The mathematical model equations

The mathematical model is based on the thermal balance equation of elements (resulted by the mould division) in accordance with Figure 2. At any time τ_q , the status of each element “i, j, k” is characterized by the momentary temperature T_{ijk}^q and solid fraction ξ_{ijk}^q . From the thermal balance equation for an element “ijk”, for the elementary time interval “ τ ”, the parameters T_{ijk}^{q+1} , ξ_{ijk}^{q+1} can be determined for the next moment τ_{q+1} . The heat balance equation for an element “ijk” are written:

$$\left(\Delta Q_{ijk}^q\right)_{tr} = \left(\Delta Q_{ijk}^q\right)_m \cdot \quad (1)$$

The heat transmitted by the element “ijk” to neighbouring elements, through the six sides, in elementary time “ τ ” (between moments τ_q și τ_{q+1}) is calculated based on the scheme from Figure 2 and is given by the equation:

$$\begin{aligned} \left(\Delta Q_{ijk}^q\right)_{tr} = & [\alpha s_{i,j,k}^q (T_{ijk}^q - T_{i-1,j,k}^q) + \alpha d_{i,j,k}^q (T_{i,j,k}^q - T_{i+1,j,k}^q) + \alpha h_{i,j,k}^q (T_{i,j,k}^q - T_{i,j-1,k}^q) + \\ & + \alpha j_{i,j,k}^q (T_{i,j,k}^q - T_{i,j+1,k}^q) + \alpha f_{i,j,k}^q (T_{i,j,k}^q - T_{i,j,k-1}^q) + \alpha t_{i,j,k}^q (T_{i,j,k}^q - T_{i,j,k+1}^q)] \cdot (\Delta)^2 \cdot \tau \end{aligned} \quad (2)$$

The mass heat given by the “ijk” element in a “ τ ” time interval depends on the initial status of the element at a “q” moment (characterized by T_{ijk}^q and ξ_{ijk}^q) and the final status at a “q+1” moment

5. Ecuatiile modelului matematic

Modelul matematic se bazează pe ecuația de schimb termic dintre elementele formei, în acord cu figura 2. La un moment oarecare τ_q , starea unui element de volum cu coordonatele “i, j, k” este caracterizată prin temperatura T_{ijk}^q și fracția de solid ξ_{ijk}^q . Din ecuația de bilanț termic particularizată pentru un element “ijk” și pentru un interval de timp “ τ ” se determină parametrii T_{ijk}^{q+1} și ξ_{ijk}^{q+1} pentru momentul următor τ_{q+1} . Ecuația de bilanț termic pentru un element “ijk” se scrie:

Căldura schimbată de elementul “ijk” cu elementele vecine, pe cele șase direcții, pe durata unui interval de timp elementar “ τ ” (între momentele τ_q și τ_{q+1}) este dată de ecuația:

Căldura masică cedată de elementul “ijk” într-un interval de timp “ τ ” depinde de starea inițială a elementului la momentul “q” (caracterizată prin T_{ijk}^q și ξ_{ijk}^q) și de starea finală la momentul “q+1”

(characterized by T_{ijk}^{q+1} and ξ_{ijk}^{q+1}). In the case of eutectic alloys, nine situations are encountered when expressing this heat. These cases are represented in the chart in Table 1. The detailed equations for each case are the following:

(caracterizată prin T_{ijk}^{q+1} și ξ_{ijk}^{q+1}). În cazul aliajelor eutectice la exprimarea acestei călduri se întâlnesc nouă situații. Aceste cazuri sunt reprezentate grafic în tabelul 1. Ecuațiile detaliate pentru fiecare caz în parte sunt următoarele:

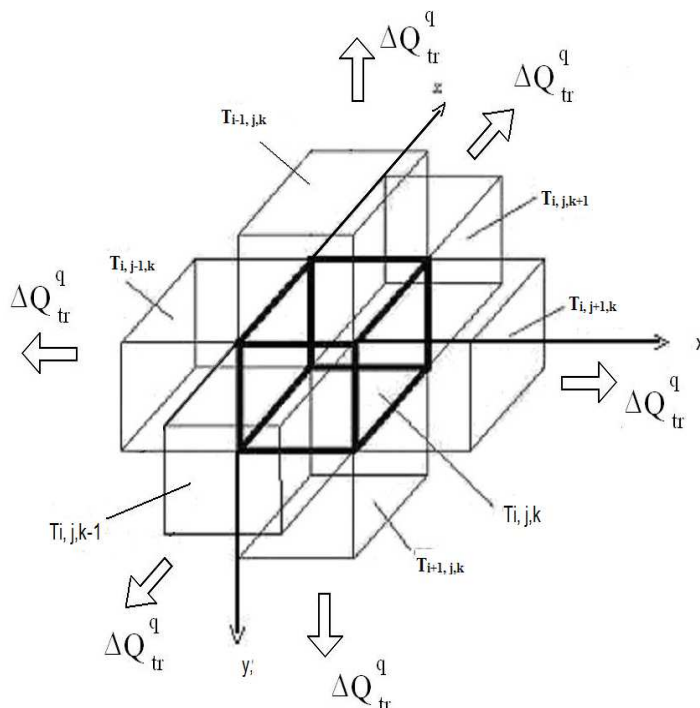


Figure 2. Volume elements temperature marking and the heat transmission schema from an element to its neighbor elements

Figura 2. Notarea temperaturii elementelor de volum și schema transmisiei căldurii de la un element spre elementele vecine

a) Cooling in liquid status and partial solidification (Table 1, no. 2). If at a τ_q moment the “ ijk ” element status is characterized by $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 0$, and at a τ_{q+1} moment its status is characterized by $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$ then the mass variation heat is given by the relation:

$$(Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} \cdot [(T_{ijk}^q - T_{Sijk}^q) \cdot c_{Lijk}^q + \xi_{ijk}^{q+1} \cdot L_{ijk}] . \quad (3)$$

b) Cooling or heating in liquid status (Table 1, no. 1a or 1b). If the initial status is $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 0$, and after the τ time interval the status quantities are $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$, then the mass variation heat of the “ ijk ” element is given by the relation:

$$\left(\Delta Q_{ijk}^q \right)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} \cdot (T_{ijk}^q - T_{ijk}^{q+1}) c_{Lijk}^q . \quad (4)$$

a) Răcire în stare lichidă și solidificare parțială (tabelul 1, nr. crt. 2). Dacă inițial la momentul τ_q starea elementului “ ijk ” este caracterizată prin $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 0$, iar după intervalul de timp τ , la momentul τ_{q+1} starea lui este caracterizată prin $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, atunci variația căldurii masice este dată de relația:

b) Răcire sau încălzire în stare lichidă (tabelul 1, nr. crt. 1a sau 1b). Dacă starea inițială este $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 0$, iar după intervalul de timp τ mărimile de stare sunt $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$, variația căldurii masice a elementului “ ijk ” este dată de relația:

Table 1. The possible cases for explaining the mass variation heat of an element $(\Delta Q_{ijk}^q)_m$ depending on the T_{ijk}^q and T_{ijk}^{q+1} temperature positioning related to temperature $T_{solidus}$ (solidus temperature)

Tabelul 1. Cazurile posibile la explicitarea variației căldurii masice a elementelor $(\Delta Q_{ijk}^q)_m$ în funcție de temperaturile T_{ijk}^q și T_{ijk}^{q+1} în raport cu temperatura $T_{solidus}$ (temperatura solidus)

No.	Current temperature	Type of process	The graphic of temperature variation in a τ time interval
1a	$T_{ijk}^q > T_{ijk}^{q+1} > T_{solidus}$	Cooling in liquid status	
1b	$T_{ijk}^{q+1} > T_{ijk}^q > T_{solidus}$	Heating in liquid status	
2	$T_{ijk}^q > T_{solidus} = T_{ijk}^{q+1}$	Cooling in liquid status and partial solidification	
3	$T_{ijk}^q > T_{solidus} > T_{ijk}^{q+1}$	Cooling in liquid status, total solidification and cooling in solid status	

<p>4a</p>	$T_{ijk}^q = T_{solidus} = T_{ijk}^{q+1}$	<p>Partial solidification at solidification temperature $T_{solidus}$</p>	
<p>4b</p>	$T_{ijk}^q = T_{solidus} = T_{ijk}^{q+1}$	<p>Partial melting at solidification temperature $T_{solidus}$</p>	
<p>5</p>	$T_{ijk}^q = T_{solidus} > T_{ijk}^{q+1}$	<p>Total solidification at solidus temperature and cooling in solid status</p>	
<p>6</p>	$T_{ijk}^q = T_{solidus} < T_{ijk}^{q+1}$	<p>Total melting at solidus temperature and heating in liquid status</p>	

<p>7a</p>	$T_{ijk}^{q+1} < T_{ijk}^q < T_{solidus}$	<p>Cooling in solid status</p>	
<p>7b</p>	$T_{ijk}^q < T_{ijk}^{q+1} < T_{solidus}$	<p>Heating in solid status</p>	
<p>8</p>	$T_{ijk}^q < T_{solidus} = T_{ijk}^{q+1}$	<p>Heating in solid status and partial melting</p>	
<p>9</p>	$T_{ijk}^q < T_{solidus} < T_{ijk}^{q+1}$	<p>Heating in solid status, total melting and heating in liquid status</p>	

c) Cooling in liquid status, total solidification and cooling in solid status (Table 1, no. 3). If initially $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 0$, and $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ and

c) Răcire în stare lichidă, solidificare totală și răcire în stare solidă (tabelul 1, nr. crt. 3). Dacă inițial $T_{ijk}^q > T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 0$, iar $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ și

$\xi_{ijk}^q = 1$, the mass variation heat of the “ijk” element is given by the relation:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} \cdot [(T_{ijk}^q - T_{Sijk}) \cdot c_{Lijk}^q + L_{ijk} + (T_{Sijk} - T_{ijk}^{q+1}) \cdot c_{Sijk}^q]. \quad (5)$$

d) Partial solidification or melting at solidus temperature (Table 1, no. 4a or 4b). If at a τ_q moment the temperature of the element “ijk” is $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, and in the final status at a τ_{q+1} moment the status is $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^{q+1} \in [0;1]$ the variation of the mass heat is:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} (\xi_{ijk}^{q+1} - \xi_{ijk}^q) L_{ijk}. \quad (6)$$

e) Total melting at solidus temperature and heating in liquid status (table 1. no. 6). If at a τ_q moment the temperature of the “ijk” element is $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, and in the final status $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$, then the variation of the mass heat is given by the relation:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} [(T_{ijk}^q - T_{ijk}^{q+1}) c_{Lijk}^q - L_{ijk} \xi_{ijk}^q]. \quad (7)$$

f) Total solidification at solidus temperature and cooling in solid status (Table 1. no. 5). If at a τ_q moment, the temperature of the “ijk” element is $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, and in the final status $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^{q+1} = 1$ then the variation of the mass heat is:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} [L_{ijk} (1 - \xi_{ijk}^q) + c_{Sijk}^q (T_{Sijk} - T_{ijk}^{q+1})]. \quad (8)$$

g) Heating in solid status and partial melting (Table 1, no. 8). If initially, at a τ_q moment, the element “ijk” is completely solidified, its status is characterized by $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 1$, and at the moment τ_{q+1} the status of the element is $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ and the solid fraction $\xi_{ijk}^{q+1} \in [0;1]$, then the variation of the mass heat is given by the relation:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} \cdot [c_{ijk}^q (T_{ijk}^q - T_{Sijk}) - (1 - \xi_{ijk}^{q+1}) L_{ijk}]. \quad (9)$$

h) Heating in solid status, total melting and heating in liquid status (Table 1, no. 9). If at a τ_q moment the status of the “ijk” element is characterized by $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 1$, and at a τ_{q+1} moment the status of the element is $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ and the solid fraction $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$, then

$\xi_{ijk}^q = 1$, variația căldurii masice a elementului “ijk” este dată de relația:

d) Solidificare sau topire parțială la temperatura solidus (tabelul 1, nr. crt. 4a sau 4b). Dacă la momentul τ_q , temperatura elementului “ijk” este $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, iar în stare finală la momentul τ_{q+1} starea este $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^{q+1} \in [0;1]$ variația căldurii masice este:

e) Retopire totală la temperatura solidus și încălzire în stare lichidă (tabelul 1. nr. crt. 6). Dacă la momentul τ_q , temperatura elementului “ijk” este $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, iar în stare finală $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$ atunci variația căldurii masice este dată de relația:

f) Solidificare totală la temperatura solidus și răcire în stare solidă (tabelul 1. nr. crt. 5). Dacă la momentul τ_q , temperatura elementului “ijk” este $T_{ijk}^q = T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q \in [0;1]$, iar în stare finală $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^{q+1} = 1$ variația căldurii masice este:

g) Încălzire în stare solidă și retopire parțială (tabelul 1, nr. crt. 8). Dacă inițial, la momentul τ_q elementul “ijk” este complet solidificat, starea lui fiind caracterizată prin $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 1$, iar la momentul τ_{q+1} starea elementului este $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$ și fracția solidă $\xi_{ijk}^{q+1} \in [0;1]$, atunci variația căldurii masice este dată de relația:

h) Încălzire în stare solidă, retopire totală și încălzire în stare lichidă (tabelul 1, nr. crt. 9). Dacă la momentul τ_q starea elementului “ijk” este caracterizată prin $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 1$, iar la momentul final τ_{q+1} starea elementului este $T_{ijk}^{q+1} > T_{Sijk}$ și fracția solidă $\xi_{ijk}^{q+1} = 0$, atunci

the variation of the mass heat of the “ijk” element is given by the relation:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} [c_{Sijk}^q (T_{ijk}^q - T_{Sijk}) - L_{ijk} + c_{Lijk}^q (T_{Sijk} - T_{ijk}^{q+1})]. \quad (10)$$

i) Heating or cooling in solid status (Table 1, no. 7a or 7b). If $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 1$, while $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ and $\xi_{ijk}^q = 1$, then the variation of the mass heat of the “ijk” element is given by the relation:

$$(\Delta Q_{ijk}^q)_m = \Delta^3 \cdot \rho_{ijk} \cdot c_{Sijk}^q \cdot (T_{ijk}^q - T_{ijk}^{q+1}). \quad (11)$$

6. The mathematical model solving

The solving of the mathematical model is based on the replacement of the relations (2 ÷ 11) in the thermic balance (1). The solving scheme uses conditionality relations regarding the initial temperature of the elements (T_{ijk}^q) and the final temperature (T_{ijk}^{q+1}). In a first phase, it start from the hypothesis that after the τ time interval, the temperature of an element with „i,j,k” coordinates becomes equal to the solidification temperature (so $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$). Thus the hypothesis calculates the solidified fraction ξ_{ijk}^{q+1} at the moment τ_{q+1} . In case the calculated solidified fraction does not have any convergence in the [0; 1] interval, then the calculus is reviewed and the correct final temperature is estimated (T_{ijk}^{q+1}). Thus the solving is ordered in the nine cases found in Table 1, according to T_{ijk}^q and T_{ijk}^{q+1} .

7. Software structure and obtained results

On the basis of this mathematical model, the software was designed to simulate the solidification of the cast parts form eutectic alloys. This uses the MATLAB programming system. MATLAB offers the following advantages:

- simplicity in making the engineering calculus that works with symbols, operators and mathematical functions;
- the possibility of working with three-dimensional mould of any dimensions;
- facilities in mathematical processes and in the chart representation of the results.

The software is suited for the simulation of the cast part solidification from eutectic alloys, with any geometry or dimensions. The software is designed for the cases when the assembly comprises

variația căldurii masice a elementului „ijk” este dată de relația:

i) Încălzire sau răcire în stare solidă (tabelul 1, nr. crt. 7a sau 7b). Dacă $T_{ijk}^q < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 1$, iar $T_{ijk}^{q+1} < T_{Sijk}$ și $\xi_{ijk}^q = 1$, variația căldurii masice a elementului “ijk” în intervalul de timp "τ" este dată de relația:

6. Schema de rezolvare a modelului matematic

Schema de rezolvare a modelului matematic are la bază înlocuirea relațiilor de mai sus (2 ÷ 11) în ecuația (1). Schema logică utilizează relații de condiționalitate, referitoare la temperatura inițială a elementelor discretizate, T_{ijk}^q , și temperatura finală T_{ijk}^{q+1} . Se pornește de la ipoteza că într-o primă fază, după intervalul de timp τ , temperatura unui element cu coordonate „i,j,k”, devine egală cu temperatura de solidificare (deci $T_{ijk}^{q+1} = T_{Sijk}$). În această condiție se calculează fracția solidificată ξ_{ijk}^{q+1} la momentul τ_{q+1} . În cazul că fracția solidificată calculată nu are convergență în intervalul [0; 1] se revine asupra calculului și se calculează temperatura finală corectă, T_{ijk}^{q+1} . Schema logică a modelului este sistematizată în cele nouă cazuri din tabelul 1, în funcție de T_{ijk}^q și de T_{ijk}^{q+1} .

7. Structura softului și rezultate obținute

Pe baza acestui model matematic, s-a realizat softul destinat simulării solidificării pieselor turnate din aliaje eutectice. Acesta utilizează sistemul de programare MATLAB. Programul MATLAB oferă următoarele avantaje:

- simplitate în realizarea aplicațiilor ingineresti care lucrează cu simboluri, operatori și funcții matematice;
- posibilitatea de lucru cu matrice spațiale de orice dimensiuni;
- facilități în prelucrarea matematică și în reprezentarea grafică a rezultatelor.

Softul realizat este aplicabil pentru simularea solidificării pieselor turnate din aliaje eutectice, cu orice geometrie și dimensiuni. Softul este conceput pentru cazul când ansamblul cuprinde maximum

a maximum of four types of materials: shape, liquid alloy, coolers, cores or insulator dye.

The software works with four types of files:

- scratch files in Matlab for initializing the simulation and calculus execution (files with *.m extension);
- files where the user asserts the selection of the desired results (files with *.in extension);
- files with numerical results of the simulation (files with *.out extension). These are automatically created by the software during simulation;
- files where the results are presented in a chart (of the type *.jpg);

The software supplies the following results regarding the solidification of the cast parts:

- the beginning time of solidification of the casting;
- the ending time of solidification of the casting;
- the hot spot coordinates;
- the temperature evolution in any point of the assembly casting – mould;
- the evolution of the solid fraction in any point of the system casting – mould;
- the evolution of the heating/ cooling speed in any point of the system;
- the evolution of the liquid alloy quantity;
- the evolution of the useful liquid alloy available in the feeder;
- the evolution of the local gradient temperature in any point of the system;
- the solidification time in any points of the system;
- the temperature in any point of the system at any moment;
- the map of the temperature in the system (isotherm map) at any moment;
- the map of the solidification front movement in the liquid alloy

These results allow an advanced analysis of the casting solidification. On this basis, the optimization of the casting technologies is possible, in order to eliminate the defects caused by solidification in the casting.

patru tipuri de materiale: forma, aliaj lichid, răcitori, miezuri sau vopsele termoizolante.

Softul lucrează cu patru tipuri de fișiere:

- fișiere de lucru în Matlab pentru inițializarea simulării și efectuarea calculului (fișiere cu extensia *.m);
- fișierele prin care utilizatorul impune selectarea rezultatelor dorite (fișiere cu extensia *.in);
- fișiere în care sunt afișate rezultatele numerice ale simulării (fișiere cu extensia *.out). Acestea sunt create automat de soft în timpul rulării;
- fișiere în care sunt reprezentate grafic rezultatele (fișiere de tip *.jpg).

Softul furnizează următoarele rezultate privind solidificarea pieselor turnate:

- timpul de început de solidificare a piesei turnate;
- timpul de sfârșit de solidificare a piesei turnate;
- coordonatele nodului termic;
- evoluția temperaturii în oricare punct din ansamblul piesă turnată - formă de turnare;
- evoluția fracției de solid în oricare punct al sistemului piesă turnată - formă;
- evoluția vitezei de încălzire/răcire în orice punct al sistemului;
- evoluția cantității de aliaj lichid din sistem;
- evoluția cantității de aliaj lichid util disponibil în maselotă;
- evoluția gradientului de temperatură local în orice punct al sistemului;
- timpul de solidificare în orice punct al sistemului;
- temperatura în orice punct al sistemului la orice moment;
- harta repartizării temperaturii în sistem (harta izotermelor) la orice moment;
- harta deplasării frontului de solidificare în aliajul lichid.

Aceste rezultate permit o analiză avansată a solidificării pieselor turnate. Pe această bază este posibilă optimizarea tehnologiilor de turnare, în vederea eliminării defectelor din piesele turnate cauzate de solidificare.

References

1. Ciobanu, I., Monescu, V., Munteanu, S.I., Crișan, A.: *Simularea 3D a solidificării pieselor turnate 3 (D simulation of casting solidification)*. Editura Universității Transilvania din Brașov, ISBN 978-973-598-678-0, Brașov, Romania, 2010 (in Romanian)
2. Ciobanu, I., Ionescu, Daniela, Monescu, V., Varga, B., Munteanu, S.I., Bedo, T., Crișan, A., Pop, A.: *Simularea solidificării pieselor turnate din aliaje care se solidifică în interval de temperatură*. Editura Universității Transilvania, ISBN 978-606-19-0337-5, Brașov, Romania, 2014 (in Romanian)
3. Ciobanu, I., Munteanu, S.I., Crișan, A., Mașniță, M.: *3D Mathematical Model to Simulate the Macro-Solidification of Castings from Eutectic Alloys*. Metalurgia International, ISSN 1582-2214, no. 5, 2005, p. 3-11
4. Ștefănescu, D.: *Science and Engineering of Casting Solidification*. Department of Material Engineering, University of Alabama, Tuscalosa, 2001, ISBN 0-306-46750-X
5. Ștefănescu, D., Kanetkar, C.: *Computer modelling of the solidification of eutectic alloys: Comparison of various models for eutectic growth of cast iron*. Department of Materials Engineering, University of Alabama, Tuscalosa, (USA) 1986, p. 255-262