

CALCULUL COEFICIENTULUI DE SCHIMB TERMIC LA MODELAREA MATEMATICĂ ÎN COORDONATE CILINDRICE A SOLIDIFICĂRII PIESELOR TURNATE

COMPUTATION OF THE HEAT EXCHANGE COEFFICIENT IN CYLINDRICAL COORDINATES MATHEMATICAL MODELLING OF CASTINGS SOLIDIFICATION

Ionuț IONESCU, Daniela IONESCU, Ioan CIOBANU, Vasile JIMAN

Transilvania University of Brasov, Romania

Rezumat. Sunt arătate avantajele utilizării coordonatelor cilindrice la modelarea matematică a solidificării pieselor turnate cu simetrie de rotație. În acest caz ansamblul piesă turnată - formă de turnare este divizat în elemente inelare. În cazul elementelor inelare în curs de solidificare, coeficientul echivalent de conductibilitate termică este influențat de sensul deplasării frontului de solidificare. În lucrare se prezintă rezultatele unui studiu privind această influență. De asemenea, s-a studiat influența razei și a grosimii elementelor inelare asupra acestui coeficient. În final se stabilește modul de lucru pentru realizarea unor modele matematice, care să țină cont de aceste aspecte.

Cuvinte cheie: turnare, solidificare, simulare, modelare matematică

1. Introducere

Modelarea matematică a solidificării pieselor turnate în coordonate cilindrice este aplicabilă în cazul solidificării pieselor cu simetrie de rotație. Modelarea în coordonate cilindrice are avantajul că numărul celulelor în care este divizat ansamblul piesă turnată – formă este mai mic. Ca urmare durata simulării solidificării unei piese turnate este mult mai redusă.

La modelarea solidificării pieselor turnate în coordonate cilindrice elementele în care este divizat ansamblul formei de turnare sunt inelare (figura 1). Elementele au grosime Δ și sunt numerotate de la interior spre exterior cu indicele “ i ” (de la $i = 1$ la $i = n$).

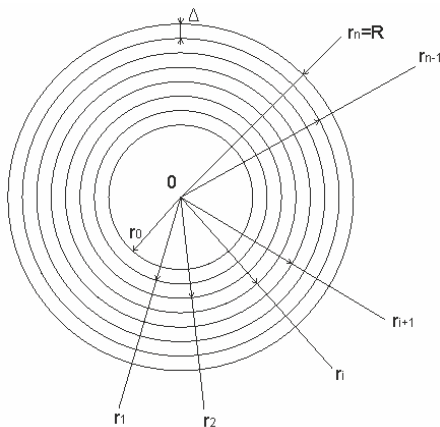


Figura 1. Divizarea secțiunii formei în elemente finite inelare în cazul unui model în coordonate cilindrice 1D

Figure 1. Division of the mould cross section into ring-shaped finite elements in the case of an 1D model in cylindrical coordinates

Abstract. The paper discusses the advantages of utilizing cylindrical coordinates in the mathematical modelling of the solidification of castings with rotational symmetry. In this case the mould – casting assembly is divided into elementary rings. It is shown that for elementary rings undergoing solidification the equivalent thermal conductivity coefficient is influenced by the direction of motion of the solidification front. The paper presents study results concerning this influence. Further study concerned the influence of ring radius and thickness on this coefficient. Eventually a working methodology is established for developing mathematical models considering these aspects.

Key words: casting, simulation, solidification, mathematical modelling

1. Introduction

Mathematical modelling of castings solidification in cylindrical coordinates is applicable for parts with rotation symmetry. Modelling in cylindrical coordinates has the advantage of a smaller number of cells into which the mould – casting assembly is divided. Consequently the duration of solidification simulation is significantly shorter.

In cylindrical coordinates modelling of castings solidification, the mould assembly is divided into ring elements (figure 1). The elements are of equal thickness (denoted Δ) and are numbered from the centre outwards by index “ i ” (from $i = 1$ to $i = n$).

Modelul matematic al solidificării se bazează pe ecuația de bilanț termic între celulele vecine:

$$(\Delta Q_i^k)_m = (\Delta Q_i^k)_{rr}, \quad (1)$$

Această ecuație exprimă egalitatea dintre variația căldurii masice $(\Delta Q_i^k)_m$ a elementului “i” într-un interval de timp τ , la momentul „ τ_k ” și căldura $(\Delta Q_i^k)_{rr}$ schimbată prin conductibilitate cu cele două elemente vecine ($i - 1$ și $i + 1$).

În cazul modelului matematic 1D, în coordonate cilindrice, căldura transmisă la momentul “k” de elementul “i” celor două elemente vecine (situat la interior cu coordonata “i - 1” și la exterior cu coordonata “i + 1”) se calculează pe baza schemei din figura 2, prin relația (s-a considerat lungimea cilindrului egală cu unitatea):

$$(\Delta Q_i^k)_{rr} = 2\pi \cdot [\alpha_{int_i^k} \cdot (T_i^k - T_{i-1}^k) \cdot r_{i-1} + \alpha_{ext_i^k} \cdot (T_i^k - T_{i+1}^k) \cdot r_i] \cdot \tau, \quad (2)$$

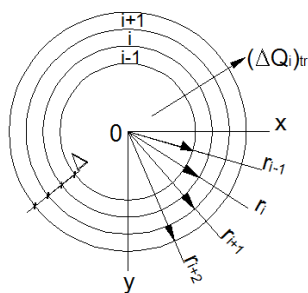


Figura 2. Schema transmisiei căldurii prin conductibilitate între elementele inelare în cazul modelului în coordonate cilindrice

Figure 2. Schematic of heat transmission by conductivity between ring elements in the case of the model in cylindrical coordinates

Notațiile au următoarele semnificații:

$(\Delta Q_i^k)_{rr}$ – căldura transmisă prin conductibilitate termică de elementul “i” către elementele vecine;
 $\alpha_{int_i^k}$ – coeficientul de transfer termic spre celula situată la interior (cu coordonata “i - 1”) la momentul “k”;

$\alpha_{ext_i^k}$ – coeficientul de transfer termic spre celula situată la exterior (“i + 1”) la momentul “k” (k este coordonata numerică de timp);

$T_{i-1}^k, T_i^k, T_{i+1}^k$ – temperaturile elementelor “i - 1”, “i”, “i + 1”, la momentul “k”;

τ – intervalul de timp pentru care se face bilanțul termic.

Coeficienții de transfer termic $\alpha_{int_i^k}$ și $\alpha_{ext_i^k}$ depind de coeficientul de conductibilitate termică a elementelor și se calculează prin relațiile:

$$\alpha_{int_i^k} = \frac{\lambda_{i-1,i}^k}{\Delta}, \quad (3)$$

$$\alpha_{ext_i^k} = \frac{\lambda_{i,i+1}^k}{\Delta}, \quad (4)$$

The mathematical model of solidification is based on the equation of heat balance of neighbouring cells.

This equation expresses the equality between the variation of the mass heat $(\Delta Q_i^k)_m$ of element “i” within a time interval τ , at time “ τ_k ” and the heat $(\Delta Q_i^k)_{rr}$ exchanged by conductivity with the two neighbouring elements ($i - 1$ and $i + 1$) within the same time interval.

In the case of the 1D mathematical model in cylindrical coordinates, the heat transmitted by element “i” at time “k” to the two neighbouring elements (located inwards, coordinate “i - 1”, and outwards, coordinate “i + 1”) is computed based on the schematic of figure 2 by equation (2), considering cylinder length equal to unity:

The following notations were made:

$(\Delta Q_i^k)_{rr}$ – heat transmitted by thermal conductivity by element “i” to the neighbouring elements;
 $\alpha_{int_i^k}$ – heat transfer coefficient towards the inward cell (coordinate “i - 1”) at time “k”;

$\alpha_{ext_i^k}$ – heat transfer coefficient towards the outward cell (“i + 1”) at time “k”;

$T_{i-1}^k, T_i^k, T_{i+1}^k$ – temperatures of elements “i - 1”, “i”, “i + 1”, at time “k”;

τ – time interval considered for the heat balance.

The heat transfer coefficients $\alpha_{int_i^k}$ and $\alpha_{ext_i^k}$ depend on the heat transfer coefficient of the elements and are computed by equations (3) and (4):

unde $\lambda_{i-1,i}^k$ reprezintă coeficientul echivalent de conductibilitate termică la momentul k , între celulele “ i ” și “ $i - 1$ ”, iar $\lambda_{i,i+1}^k$ reprezintă coeficientul de echivalent de conductibilitate termică la momentul k între celulele “ i ” și “ $i + 1$ ”. Coeficienții $\lambda_{i-1,i}^k$ și $\lambda_{i,i+1}^k$ depind, la rândul lor, de conductibilitatea termică momentană a celulelor respective, λ_{i-1}^k , λ_i^k și λ_{i+1}^k .

O particularitate la modelarea în coordonate cilindrice a solidificării constă în aceea că în cazul celulelor în curs de solidificare (celule neomogene care conțin parțial aliaj solid și parțial aliaj lichid) coeficientul de conducție termică depinde de sensul deplasării frontului de solidificare (de la exterior spre centru sau de la centru spre exterior). De aceea pentru elaborarea unor modele care să reproducă cât mai exact solidificarea trebuie analizată deplasarea frontului de solidificare pentru fiecare celulă în curs de solidificare. Apoi, în funcție de sensul deplasării acestuia, să se calculeze coeficientul de conductibilitate termică echivalent al celelei.

2. Scopul lucrării

Lucrarea are trei obiective:

- să stabilească modul în care se calculează coeficientul de conductibilitate termică echivalent, ținând cont de acest aspect (sensul solidificării celulelor);
- să pună în evidență cât de mare este influența sensului de deplasare a frontului de solidificare asupra coeficientului de conductibilitate termică a celulelor în curs de solidificare;
- să arate cum se rezolvă concret această problemă în cadrul unui model matematic în coordonate cilindrice a solidificării pieselor turnate.

3. Aspecte privind coeficientul de conducție termică în cazul pieselor cilindrice

La un moment τ_k coeficientul de conductibilitate termică al unui element depinde de starea lui momentană (temperatură și fracție de solid). Dacă elementul are temperatura $T_i^k < T_{Si}$, atunci $\lambda_i^k = \lambda_{Si}$ (λ_{Si} - coeficientul de conducție termică a aliajului în stare solidă). Dacă elementul are temperatura $T_i^k > T_{Li}$, atunci $\lambda_i^k = \lambda_{Li}$ (λ_{Li} - coeficientul de conducție termică a aliajului în stare lichidă). Dacă elementul este în curs de solidificare și are temperatura $T_{Si}^k < T_i^k < T_{Li}^k$, atunci λ_i^k depinde de fracția de solid. El are o valoare intermediară între λ_{Si} și λ_{Li} . În acest caz valoarea acestui coeficient se calculează pe baza relației generale care dă coeficientul echivalent de conductibilitate

where $\lambda_{i-1,i}^k$ is the equivalent thermal conductivity between cells “ i ” and “ $i - 1$ ” at time k , and $\lambda_{i,i+1}^k$ is the equivalent thermal conductivity between cells “ i ” and “ $i + 1$ ” at time k . Coefficients $\lambda_{i-1,i}^k$ and $\lambda_{i,i+1}^k$ depend on their turn on the instantaneous thermal conductivity of the respective cells, λ_{i-1}^k , λ_i^k and λ_{i+1}^k .

A particularity of modelling solidification in cylindrical coordinates resides in the fact that for solidifying cells (non-homogenous cells containing partly solid and partly liquid alloy) the thermal conductivity coefficient depends on the direction of motion of the solidification front (inwards or outwards). Hence the development of models accurately representing solidification needs to analyze the displacement of the solidification front for each solidifying cell. Then, depending on its direction, the equivalent thermal conductivity coefficient of the cell is computed.

2. Aim of the paper

The paper has three objectives:

- to establish a methodology for the computation of the equivalent thermal conductivity coefficient considering this aspect (direction of cell solidification)
- to highlight the degree to that the direction of motion of the solidification front influences the thermal conductivity coefficient of the solidifying cells;
- to present a concrete modality for solving this problem within a mathematical model in cylindrical coordinates of castings solidifications.

3. Aspects concerning the thermal conductivity coefficient in the case of cylindrical parts

At any given time τ_k the thermal conductivity coefficient of an element depends on its instantaneous state (temperature and solid fraction). If the element has temperature $T_i^k < T_{Si}$, then $\lambda_i^k = \lambda_{Si}$ (λ_{Si} - thermal conductivity coefficient of the alloy in solid state). If the element has temperature $T_i^k > T_{Li}$, then $\lambda_i^k = \lambda_{Li}$ (λ_{Li} - thermal conductivity coefficient of the alloy in liquid state). If the element is undergoing solidification and has temperature $T_{Si}^k < T_i^k < T_{Li}^k$, then λ_i^k depends on the solid fraction. It has a value between those of λ_{Si} and λ_{Li} . In this case this coefficient is computed by the general relationship for the equivalent thermal

termică (λ_{ECHIV}) în cazul unor straturi inelare concentrice:

$$\lambda_{ECHIV} = \frac{\ln \frac{r_n}{r_0}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}, \quad (5)$$

unde

r_i – reprezintă raza exterioară a straturilor,
 r_0 – raza interioară a stratului interior,
 r_n – raza interioară a stratului interior, iar
 λ_i – coeficientul de conductibilitate termică al straturilor respective.

În cazul elementelor inelare în curs de solidificare, conductibilitatea termică echivalentă depinde de poziția stratului solidificat în raport cu cel lichid. Aceasta depinde de direcția de deplasare a frontului de solidificare (în sensul micșorării sau al măririi razei).

Dacă frontul de solidificare își micșorează raza, stratul solidificat este plasat spre exteriorul elementului inelar (figura 3a). Aceasta se întâmplă atunci când piesa se solidifică de la exterior spre interior. Este cazul cel mai des întâlnit în practică. Se întâlnește la solidificarea pieselor cilindrice masive, a pieselor turnate centrifugal, a pieselor turnate continuu sau în zona exterioară a peretelui pieselor inelare.

Dacă frontul de solidificare își mărește raza, stratul solidificat este plasat spre interiorul elementului (figura 3b). Este cazul zonei interioare a peretelui pieselor tubulare cu diametru interior mare.

conductivity coefficient (λ_{ECHIV}) in the case of concentric ring-shaped layers:

where

r_i – represents the exterior radius of the layers,
 r_0 – the interior radius of the interior layer,
 r_n – the interior radius of the interior layer, and
 λ_i – the thermal conductivity coefficient of the respective layers.

In the case of the solidifying ring elements, the equivalent thermal conductivity depends on the position of the solidified layer in relation to the liquid one. This depends on the direction of motion of the solidification front (that is in the decreasing or increasing direction of the radius).

If the solidification front is diminishing its radius, the solidified layer is located towards the exterior of the ring element (figure 3a). This occurs when the part solidifies from the exterior inwards, the most frequent case in practice. It occurs in the solidification of massive cylindrical castings, of centrifugally cast parts, of continuously cast parts or in the exterior area of the wall of ring-shaped parts.

If the solidification front increases its radius, the solidified layer is located towards the interior of the element (figure 3b). It is the case of the interior area of the wall of tubular parts with large interior diameters.

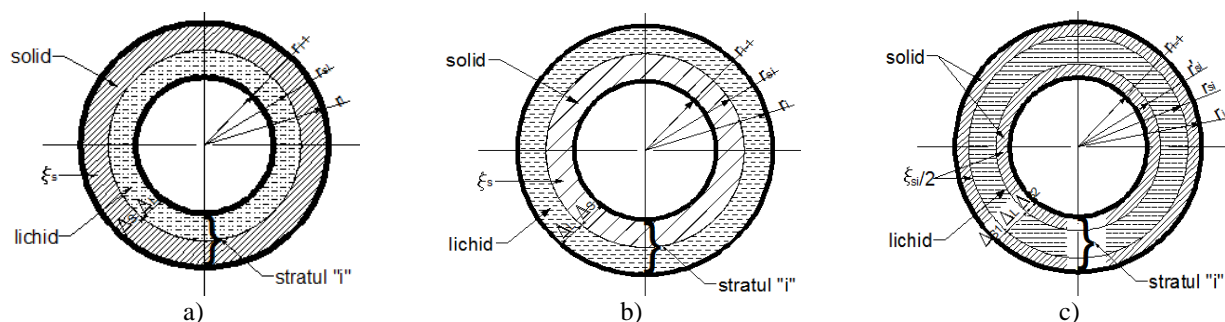


Figura 3. Repartizarea zonelor solidificate în elementele inelare la solidificarea pieselor cilindrice
 Figure 3. Distribution of the solidified areas in the ring-shaped elements during solidification of cylindrical parts

Dacă solidificarea elementului “i” are loc în două sensuri (și de la exterior și de la interior) atunci elementul cuprinde două zone de solid separate printr-o zonă de lichid (figura 3c). În piesele cilindrice tubulare această situație se întâlnește la un singur element inelar. Este cazul

If the solidification of element “i” takes place in two directions (inwards and outwards), then the element includes two solid areas separated by a liquid area (figure 3c). In tubular cylindrical parts this situation occurs in a single ring element. It is the case of the element located at the contact of the

elementului situat la întâlnirea celor două fronturi de solidificare. În cazul pieselor tubulare cu diametru interior mare, el este situat de obicei spre mijlocul grosimii peretelui piesei. La piesele cu diametru interior mic, este posibil să fie mai apropiat de suprafața interioară.

În figura 3 s-au notat cu r_{Si} , r'_{Si} și r''_{Si} razele fronturilor de solidificare.

În cazul când zona solidificată este plasată spre exteriorul elementului (figura 3a), raza frontului de solidificare se calculează în funcție de fracția de solid a elementului “ i ” (ξ_i^k) prin relația:

$$r_{Si} = \sqrt{r_i^2(1 - \xi_i^k) + \xi_i^k \cdot r_{i-1}^2} \quad (6)$$

În cazul când zona solidificată este plasată spre interiorul elementului (figura 3b), raza frontului de solidificare se calculează în funcție de fracția de solid (ξ_i^k) prin relația:

$$r_{Si} = \sqrt{r_i^2 \cdot \xi_i^k + (1 - \xi_i^k)r_{i-1}^2} \quad (7)$$

Pentru cele trei cazuri din figura 3 coeficientul echivalent de conductibilitate termică a celulelor se calculează cu relația (5). Aceasta se adaptează la cele trei cazuri astfel:

➤ pentru cazul când zona solidă este plasată spre exterior (figura 3a) relația este:

$$\lambda_i^k = \frac{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{\frac{1}{\lambda_{Li}} \ln \frac{r_{Si}}{r_{i-1}} + \frac{1}{\lambda_{Si}} \ln \frac{r_i}{r_{Si}}} \quad (8)$$

➤ pentru cazul când zona solidă este plasată spre interior (figura 3b) relația este:

$$\lambda_i^k = \frac{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{\frac{1}{\lambda_{Si}} \ln \frac{r_{Si}}{r_{i-1}} + \frac{1}{\lambda_{Li}} \ln \frac{r_i}{r_{Si}}} \quad (9)$$

➤ pentru cazul când solidificarea are loc și la exterior și la interior iar formându-se două zone de solid (figura 3c) relația este:

$$\lambda_i^k = \frac{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}{\frac{1}{\lambda_{Si}} \ln \frac{r'_{Si}}{r_{i-1}} + \frac{1}{\lambda_{Li}} \ln \frac{r_{Si}}{r'_{Si}} + \frac{1}{\lambda_{Si}} \ln \frac{r_i}{r_{Si}}} \quad (10)$$

Notățiile au semnificațiile precizate mai sus.

Realizarea unor modele matematice și a unor programe de simulare a solidificării exacte care să aibă țină cont de deplasarea frontului de solidificare

two solidification fronts. In the case of tubular parts with large interior diameters, this element is typically located towards the centre of the part wall. In parts with small interior diameter, the element is possibly closer to the interior surface.

In figure r_{Si} , r'_{Si} and r''_{Si} denotes the radii of the solidification fronts.

If the solidified area is located towards the exterior of the element (figure 3a), the radius of the solidification front is computed in dependence on the solid fraction (ξ_i^k) by equation (6):

If the solidified area is located towards the interior of the element (figure 3b), the radius of the solidification front is computed in dependence on the solid fraction (ξ_i^k) by equation (7):

For the three cases of figure 3 the equivalent thermal conductivity coefficient is computed by equation (5). This is adapted to the three cases as follows:

➤ for the case of the solid area located towards the exterior (figure 3a) the equation is:

➤ for the case of the solid area located towards the interior (figure 3b) the equation is:

➤ for the case when solidification occurs at both exterior and interior generating two solid areas (figure 3c) the equation is:

The notations are those detailed above.

Development of accurate mathematical models and solidification simulation programmes that account for the displacement of the solidification

în cadrul unei celule necesită o analiză a modului cum se desfășoară solidificarea fiecărei celule din ansamblul piesei. De aceea, în general, modelele matematice ale solidificării pieselor cilindrice utilizează o valoare medie a coeficientului de conductibilitate echivalentă a celulelor în curs de solidificare sau utilizează relația de calcul pentru situația din figura 3a. Se are în vedere că acest caz este cel mai des întâlnit în practica turnării. Dacă între conductibilitatea termică a unui aliaj în stare solidă și în stare lichidă nu este o diferență mare, aceste ipoteze nu introduc erori mari. Dacă însă diferența este mare, pentru calcule exacte este necesar să se țină cont de sensul deplasării frontului de solidificare. La unele aliaje între coeficientul de conducție în stare solidă și lichidă există diferențe mari. De exemplu, în cazul fontelor cenușii conductibilitatea în stare solidă este $\lambda_s = 40$ W/mK, iar în stare lichidă este $\lambda_L = 30$ W/mK. Studiul efectuat și rezultatele prezentate în această lucrare au urmărit să clarifice această problemă legată de calculul coeficientului echivalent de conducție termică al celulelor în curs de solidificare în cazul modelării matematice în coordonate cilindrice a solidificării.

4. Mod de lucru

Pentru a verifica în ce măsură grosimea și poziția zonei solidificate (lângă cercul exterior sau lângă cercul interior), în cazul unui element inelar, influențează coeficientul echivalent de conductibilitate termică al elementului, s-a efectuat un studiu aplicat concret. Studiul s-a realizat pentru cazul unei piese cilindrice turnată din fontă cenușie. S-a considerat un element inelar rezultat din divizarea piesei în vederea modelării solidificării. Elementul are grosimea $\Delta = 16$ mm, raza interioară $r_{i-1} = 50$ mm și raza exterioară $r_i = 66$ mm. Frația de solid s-a modificat între $\xi_i^k = 0$ și $\xi_i^k = 1$.

S-au analizat două cazuri: a) când solidificarea începe de la exterior spre centru inelului, și b) când solidificarea începe de la cercul interior al inelului.

Coeficientul de conductibilitate termică al fontei cenușii în stare solidă s-a considerat $\lambda_{Si} = 40$ W/mK, iar în stare lichidă $\lambda_{Li} = 30$ W/mK.

S-a calculat coeficientul de conducție termică în cu relațiile (8) și (9). De asemenea s-a calculat diferența absolută $\Delta\lambda_i$ și relativă $(\Delta\lambda_i)_{rel}$ între valorile obținute în cele două cazuri. S-au utilizat relațiile:

$$\Delta\lambda_i = \lambda'_i - \lambda_i, \quad (11)$$

front within a cell calls for analysis of solidification of each cell of the part assembly. For this reason mathematical models of cylindrical castings solidification typically utilize a mean value of the equivalent thermal conductivity coefficient of the solidifying cells or utilize the equation corresponding to the case presented in figure 3a. It has to be considered that this is the most frequently encountered case in foundry practice. If the difference between the thermal conductivity of an alloy in solid and liquid state is small, these hypotheses are unlikely to cause significant errors. If, however, the difference is great, accurate computation requires taking into account the direction of solidification front motion. Certain alloys display great differences between the conductivity coefficient in solid and liquid state. For example in grey cast irons solid state conductivity is $\lambda_s = 40$ W/mK, and in liquid state $\lambda_L = 30$ W/mK. The conducted study and results presented in this paper are aimed at clarifying this problem of computing the equivalent thermal conductivity coefficient of solidifying cells in the case of mathematical modelling in cylindrical coordinates of solidification.

4. Working methodology

A concrete applicative study was carried out in order to establish the extent to that thickness and position of the solidified area (near the exterior or interior circle) of one ring element influence its equivalent thermal conductivity coefficient. The study was conducted on a grey cast iron cylindrical part, considering a ring element resulted upon division of the part in view of solidification modelling. Element thickness is $\Delta = 16$ mm, the interior radius $r_{i-1} = 50$ mm and the exterior radius $r_i = 66$ mm. The solid fraction varied between $\xi_i^k = 0$ and $\xi_i^k = 1$.

Two cases were analyzed: a) solidification starting from the exterior inwards, towards the centre of the ring, and b) solidification starts from the interior circle of the ring;

The thermal conductivity coefficient of grey cast iron was assumed $\lambda_{Si} = 40$ W/mK in solid state, and $\lambda_{Li} = 30$ W/mK in liquid state.

Equations (8) and (9) were used to compute the thermal conductivity coefficient. Further calculated by equations (11) and (12) were the absolute difference $\Delta\lambda_i$ and the relative difference $(\Delta\lambda_i)_{rel}$ between the values obtained in the two cases.

$$(\Delta\lambda_i)_{rel} = 100 \cdot (\lambda'_i - \lambda_i) / \lambda'_i \quad (12)$$

unde λ_i este coeficientul de conducție termică în cazul când zona solidificată este plasată spre exteriorul inelului (figura 3a), iar λ'_i este coeficientul de conducție termică în cazul când zona solidificată este plasată lângă cercul interior al inelului (figura 3b). Rezultatele sunt date în tabelul 1.

where λ_i is the thermal conductivity coefficient when the solidified area is located towards the exterior of the ring (figure 3a), and λ'_i is the thermal conductivity coefficient when the solidified area is located next to the interior circle of the ring (figure 3b). Results are given in table 1.

Tabelul 1. Rezultate privind influența poziției fracției de solid asupra coeficientului de conducție echivalent în cazul solidificării unei celule inelare din fontă ($r_{i-1} = 50$ mm, $r_i = 66$ mm, $\lambda_{Si} = 40$ W/mK, $\lambda_{Li} = 30$ W/mK)

Table 1. Results concerning the influence of solid fraction position on the equivalent thermal conductivity coefficient in the case of a cast iron ring cell undergoing solidification ($r_{i-1} = 50$ mm, $r_i = 66$ mm, $\lambda_{Si} = 40$ W/mK, $\lambda_{Li} = 30$ W/mK)

No.	ξ_i^k	r_{Si}	λ_i	r'_{Si}	λ'_i	$\Delta\lambda_i$	$100 \cdot \Delta\lambda_i / \lambda'_i$
	-	mm	W/mK	mm	W/mK	W/mK	%
1	0	66	30	50	30	0	0
2	0.125	64.2184	30.7579	52.2685	31.2485	0.4906	1.5699
3	0.25	62.3859	31.6026	54.4426	32.4905	0.8879	2.73279
4	0.375	60.4979	32.5515	56.5332	33.7299	1.1784	3.49363
5	0.5	58.5491	33.6273	58.5491	34.9705	1.3432	3.84095
6	0.625	56.5332	34.8601	60.4979	36.2151	1.355	3.74153
7	0.75	54.4426	36.2910	62.3859	37.4667	1.1757	3.11628
8	0.875	52.2685	37.9769	64.2184	38.7276	0.7507	1.93841
9	1	50	40	66	40	0	0

Rezultatele prezentate în tabelul 1 arată următoarele:

- conductibilitatea termică echivalentă calculată în cazul când zona solidă este plasată la exterior este mai mică;
- diferența între valorile calculate în cele două cazuri este maximă când fracția de solid este $\xi_i^k = 0,5$;
- diferența relativă între cele valori ale coeficientului de conducție (zona solidă la exterior și respectiv la interior) este relativ mică, sub 3,85% (această valoare este valabilă numai pentru cazul analizat – celulă din fontă cu dimensiunile date mai sus).

În continuare studiul s-a extins pentru analiza influenței grosimii și a diametrului elementelor inelare asupra valorii coeficientului echivalent de conducție termică. Pentru aceasta s-a modificat razele și grosimea elementelor. S-a modificat grosimea elementelor inelare între $\Delta = 2$ mm și $\Delta = 16$ mm, iar raza interioară a elementelor între $r_{i-1} = 5$ mm și $r_{i-1} = 200$ mm. Calculele s-au efectuat pentru cazul unei celule inelare cu fracția de solid $\xi_i^k = 0,5$. S-a ales această valoare deoarece în acest caz poziția zonei solide în interiorul elementelor are influența cea mai mare asupra coeficientului echivalent de conductibilitate.

Din punct de vedere al poziției zonei solide s-au analizat trei cazuri de solidificare: 1°) solidificare

The results of presented in table 1 allow the following considerations:

- equivalent thermal conductivity computed in the case of the solid area located at the exterior is smaller;
- the difference between the values computed in the two cases s maxim for a solid fraction of $\xi_i^k = 0.5$;
- the relative difference between the two values of the conductivity coefficient (the solid area being at the exterior and interior, respectively) is relatively small, below 3.85% (this values is valid for the analyzed case only – grey cast iron cell of the above indicated dimensions).

The study was further expanded to the analysis of thickness and diameter of the ring elements on the value of the equivalent thermal conductivity coefficient. For this element radii and thickness were modified. Ring element thickness was modified between $\Delta = 2$ mm and $\Delta = 16$ mm, and the radius between $r_{i-1} = 5$ mm and $r_{i-1} = 200$ mm. Computations were conducted for a ring cell of $\xi_i^k = 0.5$ solid fraction. This value was selected as in this case the position of the solid area within the elements has the greatest influence on the equivalent thermal conductivity coefficient.

Related to the position of the solid area three cases were analyzed: 1°) solidification from the exterior, 2°) solidification from the interior, and

de la exterior, 2°) solidificare de la interior, și 3°) solidificare simultană de la interior și de la exterior. Rezultatele sunt date în tabelele 2 și 3. 3°) simultaneous solidification from the interior and from the exterior. Results are given in tables 2 and 3.

Tabelul 2 Rezultate privind influența grosimii elementelor inelare asupra coeficientului echivalent de conductibilitate al elementelor inelare în curs de solidificare

Table 2. Results concerning the influence of ring element thickness on the equivalent thermal conductivity coefficient in ring elements undergoing solidification

No.	-	r_{i-1}	r_{i-1}	Δ	r_{Si}	r'_{Si}	λ_{Si}	λ_{Li}	λ_i
	-	mm	mm	mm	mm	mm			
1	exterior, fig. 3a	50	52	2	51.0098	-	40	30	34.1900
2	exterior, fig. 3a	50	58	8	54.1479	-	40	30	33.9274
3	exterior, fig. 3a	50	66	16	58.5491	-	40	30	33.6273
4	interior, fig. 3b	50	52	2	51.0098	-	40	30	34.3820
5	interior, fig. 3b	50	58	8	54.1479	-	40	30	34.6517
6	interior, fig. 3b	50	66	16	58.5491	-	40	30	34.9705
7	ext.+int., fig. 3c	50	52	2	51.5073	50.5074	40	30	34.2874
8	ext.+int., fig. 3c	50	58	8	56.1070	52.1153	40	30	34.3127
9	ext.+int., fig. 3c	50	66	16	62.3859	54.4426	40	30	34.3785

S-a considerat fracția de solid totală $\xi_i^k = 0,5$ (În cazul 3c, fracția de solid s-a considerat repartizată egal în cele două zone $(\xi_i^k)' = (\xi_i^k)'' = (\xi_i^k)/2 = 0,25$.
The total solid fraction was assumed $\xi_i^k = 0.5$ (In case 3c, the solid fraction was considered equally distributed between the two areas $(\xi_i^k)' = (\xi_i^k)'' = (\xi_i^k)/2 = 0.25$.)

Tabelul 3 Influența diametrului elementelor finite inelare asupra coeficientului echivalent de conductibilitate termică la celule în curs de solidificare

Table 3. Influence of finite ring element diameter on the equivalent thermal conductivity coefficient in cells undergoing solidification

No.	-	r_{i-1}	r_{i-1}	Δ	r_{Si}	λ_{Si}	λ_{Li}	λ_i
	-	mm	mm	mm	mm			
1	exterior, fig. 3a	50	66	16	58.5491	40	30	33.6273
2	exterior, fig. 3a	100	116	16	108.2959	40	30	33.9273
3	exterior, fig. 3a	200	216	16	208.1538	40	30	34.0984

S-a considerat fracția de solid totală $\xi_i^k = 0,5$.
The total solid fraction was assumed $\xi_i^k = 0.5$.

Rezultatele din tabelele 2 și 3 arată următoarele:

- creșterea grosimii inelelor (Δ) determină o creștere ușoară a coeficientului echivalent de conductibilitate termică,
- creșterea razei elementelor determină creșterea

The results given in tables 2 and 3 reveal the following:

- increase of ring thickness (Δ) causes a slight increase of the equivalent thermal conductivity coefficient,
- increase of element radius causes a slight increase

- ușoară a coeficientului de conductibilitate,
- influența variației grosimii și a razei elementelor este redusă;
- valoarea coeficientului echivalent de conductibilitate a elementelor inelare este apropiată în toate cazurile de valoarea medie armonică între conductibilitatea în stare lichidă și solidă, (valoare care este valabilă pentru un element plan cu fracție de solid ($\xi_i^k = 0,5$).

5 Concluzii

Modelarea solidificării pieselor cu simetrie de rotație în coordonate cilindrice prezintă mai multe avantaje:

- elementele finite (inelare) în care este divizat ansamblul formei reproduc fidel geometria piesei;
- solidificarea pieselor cilindrice cu lungime mare se poate reproduce prin modele 1D, iar a pieselor fasonate prin modele 2D;
- numărul de calcule este mai mic, iar durata simulării unui proces de solidificare se reduce considerabil;
- coeficientul echivalent de conductibilitate termică a elementelor inelare, este influențat de dimensiunile elementelor și de poziția zonei solide în interiorul inelului;
- cazul cel mai des întâlnit în practica solidificării pieselor turnate este când solidificarea se desfășoară de la exterior spre interior;
- pentru o modelare cât mai exactă a solidificării este necesar ca la calculul coeficientului echivalent de conducție termică a elementelor inelare să se țină cont de sensul deplasării frontului de solidificare;
- pentru modele simplificate coeficientul mediu de conducție se poate calcula prin relația (8) (relație valabilă pentru când zona solidă este plasată la exteriorul celulei, cazul cel mai întâlnit).

Pentru realizarea unor modele și softuri care să țină cont de modul cum se desfășoară solidificarea elementelor, se pune problema stabilirii poziției zonei solide (la exterior, la interior, combinat la exterior și la interior) în cadrul fiecărui element. Aceasta este necesar pentru a calcula coeficientul echivalent de conductibilitate termică al elementelor în curs de solidificare cu relația adecvată.

În continuare se prezintă modul de lucru pentru rezolvarea acestei probleme în cazul solidificării aliajelor eutectice. Temperatura elementului analizat în curs de solidificare “*i*” (figura 2) se compară temperatura acestui element cu temperaturile elementelor vecine (elementele “*i* – 1” și “*i* + 1”).

- of the thermal conductivity coefficient,
- variation of element thickness and radius are of small influence;
- in all cases the value of the ring element equivalent thermal conductivity coefficient is close to the harmonic mean of liquid and solid conductivity (value valid for a plane element of (ξ_i^k) = 0.5 solid fraction).

5. Conclusions

Modelling in cylindrical coordinates of the solidification of castings with rotational symmetry has two advantages:

- the (ring-shaped) finite elements into which the mould assembly is divided accurately reproduce part geometry.
- solidification of long cylindrical parts can be reproduced by 1D models, while that of patterned parts by 2D models;
- this significantly reduces computational volume and simulation duration of a solidification process;
- the equivalent thermal conductivity coefficient of the ring elements is influenced by element dimensions and solid area position within the ring;
- the most frequently occurring case in castings solidification practice is that of solidification taking place from the exterior inwards;
- for an accurate modelling of solidification computation of the equivalent thermal conductivity coefficient of the ring elements needs to consider these aspects and particularly the displacement of the solidification front;
- in simplified models the mean conductivity coefficient can be computed by equation (8) - valid for the most frequent cases, when the solid area is located at the exterior of the cell.

In order to develop models and software that consider the specifics of element solidification, the position of the liquid area within each element needs to be established (exterior, interior, combined exterior and interior). This is required for using the adequate equation in calculating the equivalent thermal conductivity coefficient of solidifying elements.

Further the solving methodology of this problem for the solidification of eutectic alloys is presented. The temperature of the analyzed solidifying element “*i*” (figure 2) is compared to the temperatures of the neighbouring elements (elements “*i* – 1” and “*i* + 1”).

- dacă temperatura elementului analizat în curs de solidificare este $T_i^k = T_{Si}$, iar temperaturile elementelor vecine sunt $T_{i+1}^k < T_{Si}$ și $T_{i-1}^k \geq T_{Si}$, atunci solidificarea se desfășoară de la exterior spre interior (figura 3a). În acest caz coeficientul echivalent de conducție termică se calculează cu relația (8).
 - dacă temperatura elementului analizat în curs de solidificare este $T_i^k = T_{Si}$, iar temperaturile elementelor vecine sunt $T_{i+1}^k \geq T_{Si}$ și $T_{i-1}^k < T_{Si}$, atunci solidificarea se desfășoară de la interior spre exterior (figura 3b). În acest caz coeficientul echivalent de conducție termică se calculează cu relația (9).
 - dacă temperatura elementului analizat în curs de solidificare este $T_i^k = T_{Si}$, iar temperaturile elementelor vecine sunt $T_{i+1}^k < T_{Si}$ și $T_{i-1}^k < T_{Si}$, atunci solidificarea se desfășoară în ambele sensuri (figura 3c). În acest caz coeficientul echivalent de conducție termică se calculează cu relația (10).
- if the temperature of the analyzed solidifying element is $T_i^k = T_{Si}$, and the temperatures of the neighbouring elements are $T_{i+1}^k < T_{Si}$ and $T_{i-1}^k \geq T_{Si}$, then solidification occurs from the exterior inwards (figure 3a). In this case the equivalent thermal conductivity coefficient is computed by equation (8).
 - if the temperature of the analyzed solidifying element is $T_i^k = T_{Si}$, and the temperatures of the neighbouring elements are $T_{i+1}^k \geq T_{Si}$ and $T_{i-1}^k < T_{Si}$, then solidification occurs from the interior outwards (figure 3b). In this case the equivalent thermal conductivity coefficient is computed by equation (9).
 - if the temperature of the analyzed solidifying element is $T_i^k = T_{Si}$, and the temperatures of the neighbouring elements are $T_{i+1}^k < T_{Si}$ and $T_{i-1}^k < T_{Si}$, then solidification occurs in both directions (figure 3c). In this case the equivalent thermal conductivity coefficient is computed by equation (10).

References

1. Ciobanu, I., Munteanu, S.I., Crișan, A. (2004) *Model matematic și soft 3D bazat pe metoda diferențelor finite pentru simularea solidificării pieselor turnate din aliaje eutectice (Mathematical Model and 3D Software Based on Finite Differences Method for to Simulate the Solidification of Parts Cast by Eutectic Alloy)*. Metalurgia, ISSN 0461-9579, vol. 56, no. 12, 2004, p. 17-24, (in Romanian)
2. Ciobanu, I., Monescu, V., Munteanu, S.I., Crișan, A. (2010) *Simularea 3D a solidificării pieselor turnate (3D Simulation of Casting Solidification)*. Editura Universității Transilvania din Brașov, ISBN 978-973-598-678-0, Brașov, Romania (in Romanian)
3. Jiman, V., Ciobanu, I., Munteanu, S.I. (2009) *Model matematic 2D pentru simularea solidificării pieselor turnate centrifugal / 2D Mathematical Model for the Simulation of Centrifugal Casting*. RECENT, ISSN 1582-0246, vol. 10(2009), no. 2(26), p. 113-120, July 2009
4. Ionescu, I., Ionescu, Daniela, Ciobanu, I., Jiman, V. (2012) *Modelarea matematică a solidificării pieselor cilindrice turnate din aliaje eutectice (Mathematical Modelling of Eutectic Alloy Cylindrical Castings Solidification)*. Metalurgia, ISSN 0461-9579, vol. 64, no. 8, 2012, p. 10-20 (in Romanian)

Lucrare primită în octombrie 2012

Received in October 2012